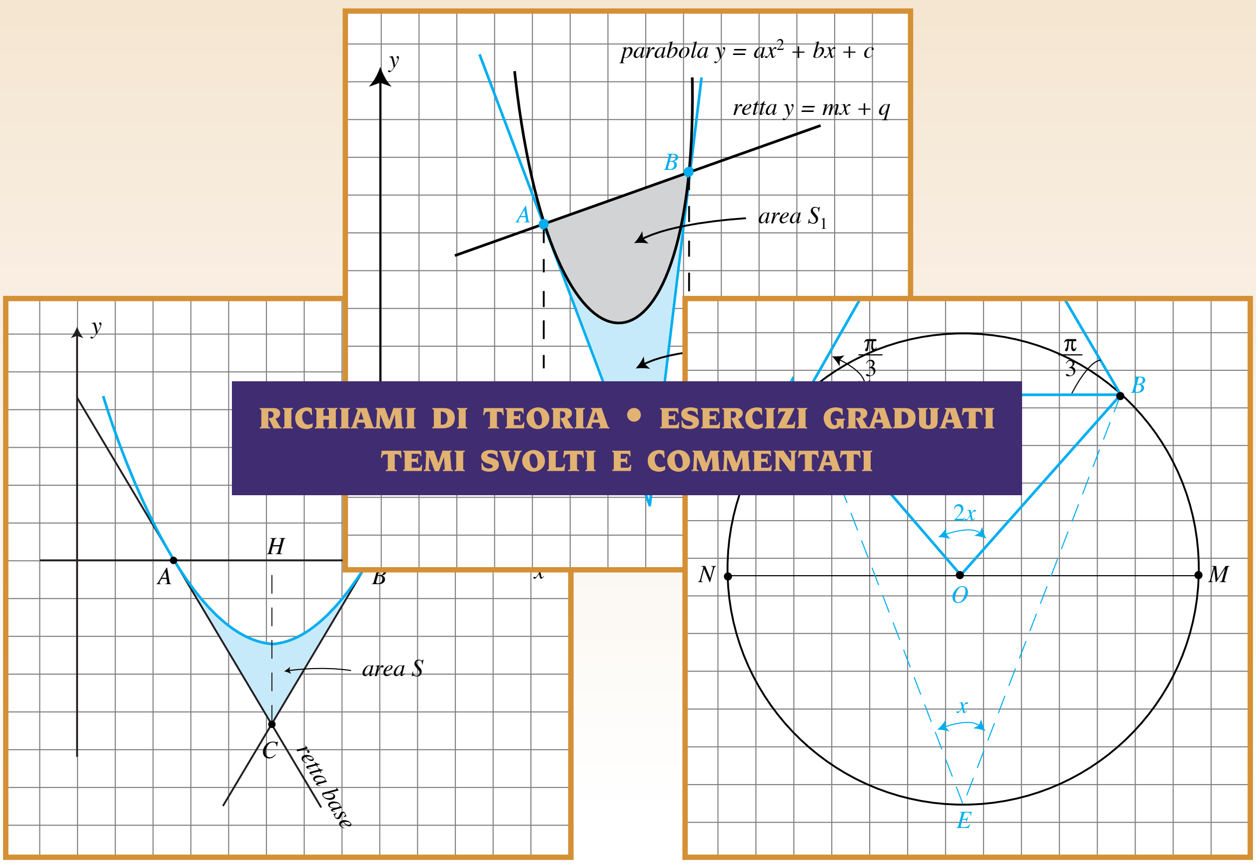
Giorgio Valdes

La prova scritta di matematica

per i Licei Scientifici



RICHIAMI DI TEORIA • ESERCIZI GRADUATI
TEMI SVOLTI E COMMENTATI

edisco

La prova scritta di
matematica

Giorgio Valdes

La prova scritta di matematica

per i Licei Scientifici

RICHIAMI DI TEORIA • ESERCIZI GRADUATI
TEMI SVOLTI E COMMENTATI

Disegni, fotocomposizione e impaginazione: C.G.M. - Napoli

Torino - 10128 Via Pastrengo, 28
Tel. 011.547880
Fax 011.5175396
e-mail: info@edisco.it
www.edisco.it

Stampato presso: Officine Grafiche Editoriali Zeppegno (TO)

Ristampa
5 4 3 2 1 0

Indice

Parte prima
RICHIAMI TEORICI CON ESERCITAZIONI E FORMULARIO

Parte seconda
PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

Parte terza

ALCUNI TEMI D'ESAME SUI MASSIMI E MINIMI

Parte quarta

PROBLEMI TRIGONOMETRICI

Parte quinta

ALCUNI TEMI D'ESAME DI TIPO TRIGONOMETRICO

Parte sesta

FUNZIONI CON PARAMETRI

Parte settima

ALCUNI TEMI D'ESAME SULLE FUNZIONI CON PARAMETRI

Parte ottava

CALCOLO DI AREE E DI VOLUMI

Prefazione

Questo manuale è rivolto agli Studenti del quinto anno dei Licei Scientifici che devono prepararsi per la prova scritta di matematica dell'Esame di Stato.

L'opera, oltre a contenere una parte dedicata ai richiami teorici e al formulario, è suddivisa in quattro blocchi tematici:

1) problemi di massimo e minimo
2) problemi trigonometrici
3) funzioni con parametri
4) calcolo di aree e di volumi,

ciascuno dei quali è costituito da due parti:

– una serie di problemi di difficoltà crescente, aventi lo scopo di consolidare i concetti, attivare il processo di sintesi delle conoscenze, far acquisire piena padronanza delle tecniche di calcolo e delle metodologie risolutive;
– un gruppo di temi, scelti tra quelli proposti agli esami di maturità, risolti in modo lineare e graduale, con i richiami teorici necessari per motivare le scelte effettuate.

L'opera è strutturata in modo che gli Allievi trovino stimolante e gratificante risolvere problemi, pervenendo ad una visione d'insieme della matematica studiata nel quinquennio e all'acquisizione di una sicurezza metodologica adeguata per affrontare i temi Ministeriali.

Data la novità del testo così impostato, sarò grato ai Colleghi e agli Studenti che vorranno farmi pervenire le loro osservazioni e le loro critiche.

Ringrazio la Casa Editrice Edisco che ha curato in modo particolare la veste tipografica del testo, l'Editore per la fiducia e la stima che mi ha dimostrato e il Redattore per l'accurata revisione del manoscritto.

Giorgio Valdes

Parte Prima

RICHIAMI TEORICI CON ESERCITAZIONI E FORMULARIO

1.1 Dato un segmento costruire il suo asse

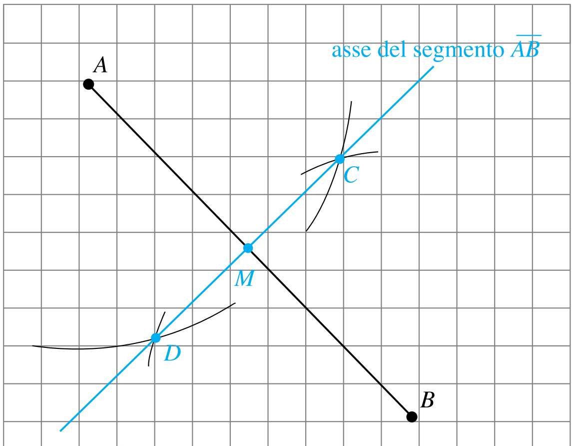


Fig. 1 ▲

L'asse di un segmento $\overline{AB}$ (Fig. 1) è la retta perpendicolare ad $\overline{AB}$ passante per il suo punto medio M. Con centro in A e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di $\overline{AB}$, si tracciano due archetti da parti opposte rispetto ad $\overline{AB}$. Con centro in B e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in C e D rispettivamente. La retta $\overline{CD}$ è l'asse del segmento $\overline{AB}$.

1.2 Per un punto condurre la perpendicolare ad una retta data

Se il punto P appartiene alla retta s, con centro in P e con apertura di compasso arbitraria, si tracciano due archetti che intersecano la retta s in C e D rispettivamente (Fig. 2). Con centro in C e apertura di compasso arbitraria, ma maggiore della metà di $\overline{CD}$, si tracciano due archetti da parti opposte rispetto a $\overline{CD}$. Con centro in D e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in E, F rispettivamente. La retta EF passa per il punto P ed è perpendicolare alla retta s.

Se il punto P è esterno alla retta s (Fig. 3), con centro in P e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano la retta s in C e D. Con

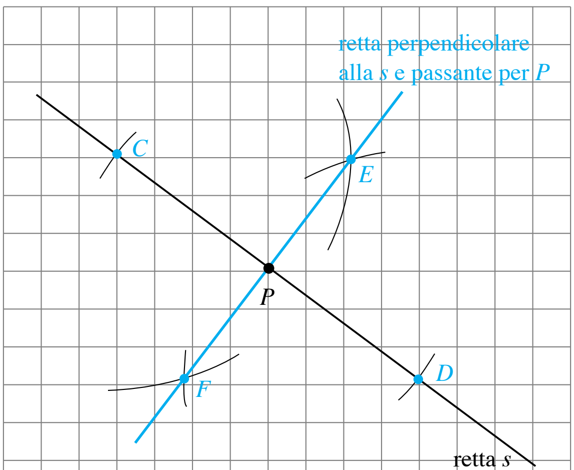


Fig. 2 ▲

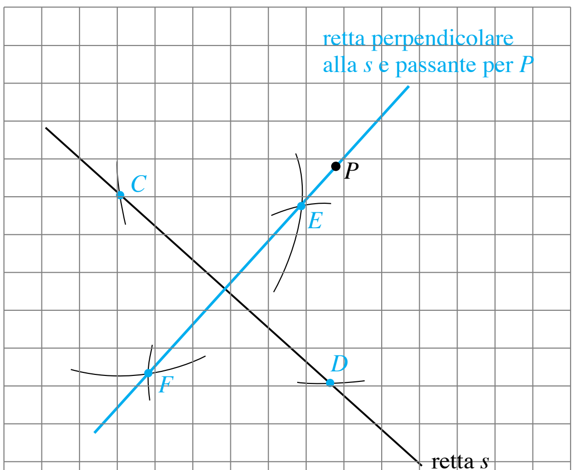


Fig. 3 ▲

centro in C e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di $\overline{CD}$, si tracciano due archetti da parti opposte rispetto a $\overline{CD}$. Con centro in D e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in E, F rispettivamente. La retta EF passa per il punto P ed è perpendicolare alla retta s.

1.3 Costruire la bisettrice di un angolo dato

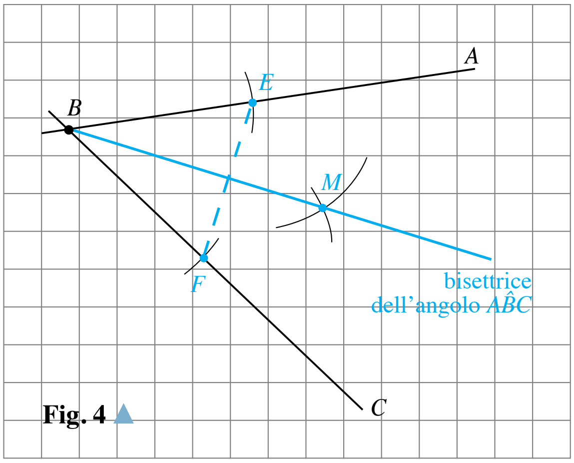


Fig. 4

Sia $A\hat{B}C$ l'angolo dato (Fig. 4). Con centro in B e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano in E, F rispettivamente la retta BA e la retta BC. Con centro in E e con raggio arbitrario, ma maggiore della metà del segmento $\overline{EF}$, si traccia un archetto da parte opposta al punto B. Con centro in F e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra in M l'archetto precedente. La semiretta BM divide l'angolo dato $A\hat{B}C$ in due parti uguali. BM è asse del segmento $\overline{EF}$ e bisettrice dell'angolo dato $A\hat{B}C$.

1.4 Costruire il triangolo equilatero e le relative circonferenze circoscritta e inscritta

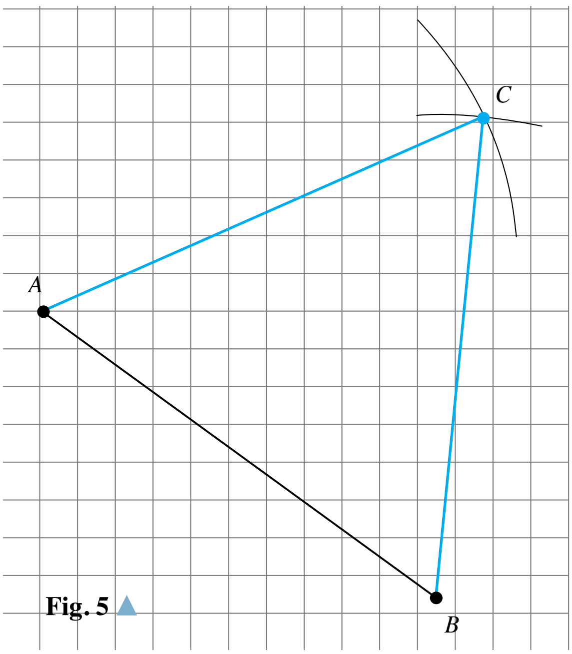


Fig. 5

Sia $\overline{AB}$ uno dei lati del triangolo equilatero (Fig. 5). Con centro in A e con raggio uguale ad $\overline{AB}$ si traccia un archetto e con centro in B, e raggio sempre uguale ad $\overline{AB}$, si traccia un altro archetto che interseca il precedente nel punto C. Il triangolo ABC è equilatero.

Il circocentro (centro della circonferenza circoscritta) è il punto d'incontro degli assi dei tre lati. È sufficiente tracciare due assi, ad esempio quelli relativi ai lati $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (Fig. 6). Con centro in A e raggio arbitrario, ma maggiore della metà del lato $\overline{AC}$, si traccia un archetto esterno al triangolo. Con centro in C e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra il precedente nel punto E. La perpendicolare ad AC passante per E è l'asse del segmento AC. Analogamente, si determina l'asse HL del lato $\overline{BC}$. Il circocentro O è il punto d'incontro tra i

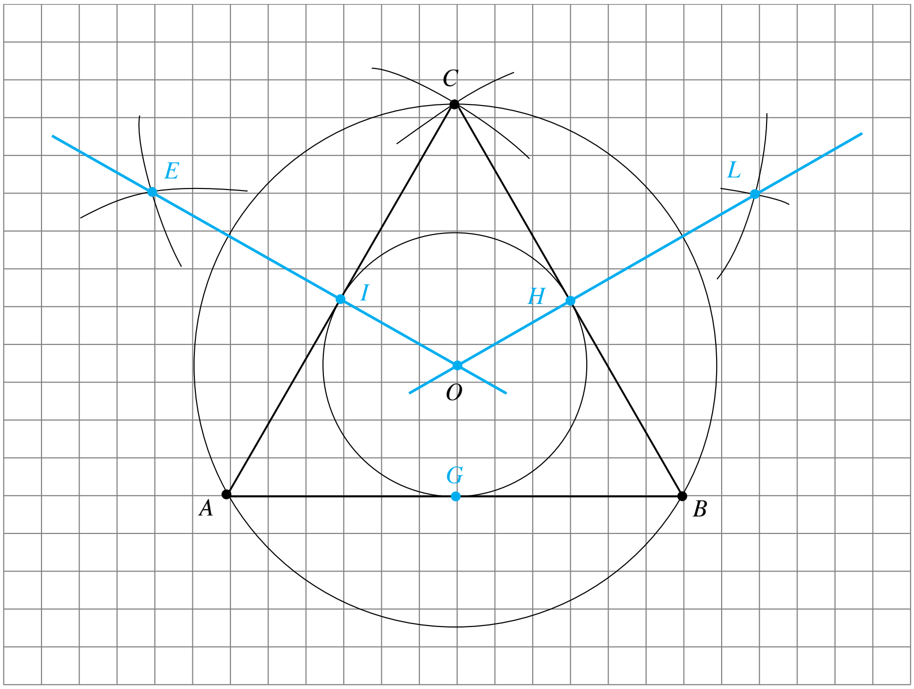


Fig. 6

due assi EI, HL. Con centro in O si traccia la circonferenza di raggio $\overline{OC}$ verificando il suo passaggio per i punti A, B. Trattandosi di un triangolo equilatero, il circocentro O è anche incentro (centro della circonferenza inscritta e punto di incontro delle tre bisettrici), baricentro (punto di incontro delle tre mediane), ortocentro (punto di incontro delle tre altezze). Con centro in O e raggio $\overline{OH}$ si traccia la circonferenza inscritta nel triangolo che è tangente ai lati $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ nei punti H, I, G rispettivamente.

1.5 Circocentro di un triangolo qualunque

Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo è chiamato circocentro.

Indicando con A, B, C i vertici del triangolo e con O il circocentro, si ha:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

cioè: il circocentro è equidistante dai tre vertici.

Il circocentro è il punto d'incontro degli assi dei lati del triangolo. Per individuare graficamente il punto O è sufficiente disegnare due assi di due lati scelti arbitrariamente.

Per tracciare (Fig. 7) l'asse del lato $\overline{AC}$, con centro in A e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di $\overline{AC}$, si traccia un archetto esterno al trian-

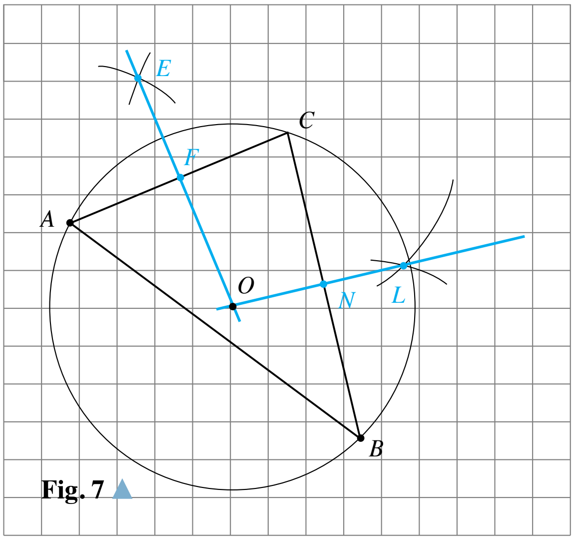


Fig. 7

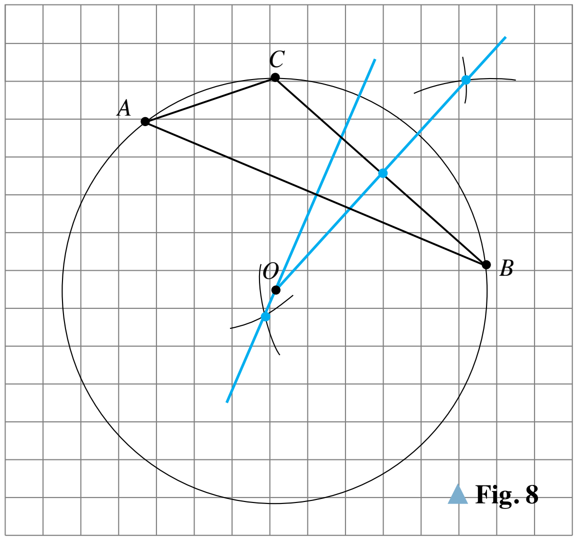


Fig. 8

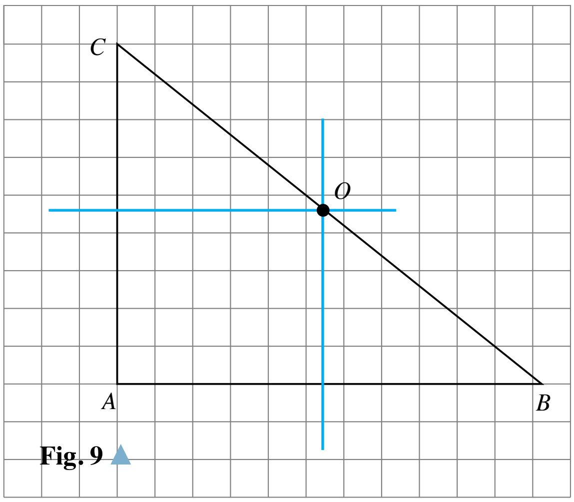


Fig. 9

golo; con centro in C, e con lo stesso raggio, si traccia un altro archetto che incontra nel punto E quello precedente. Individuato il punto medio F del lato AC, si traccia l'asse EF. Analogamente si traccia l'asse LN del lato $\overline{BC}$. Il circocentro O è il punto d'incontro tra i due assi EF, NL.

Con centro in O si disegna la circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Se il triangolo è ottusangolo, il circocentro è esterno al triangolo (Fig. 8).

Se il triangolo è rettangolo, il circocentro coincide con il punto medio dell'ipotenusa (Fig. 9).

ESEMPIO

Determinare graficamente e analiticamente il circocentro del triangolo di vertici

$$\boldsymbol{A\ (2\ ;\ -2)\ ,\quad B\ (1\ ;\ \sqrt{3})\ ,\quad C\ (4\ ;\ 0)}$$

Graficamente (Fig. 10) si traccia l'asse ME del lato $\overline{BC}$ e l'asse GF del lato $\overline{AC}$.

Il punto d'incontro tra i due assi ME e GF è il circocentro

$$\boxed{O\ (2\ ;\ 0)}$$

Analiticamente si procede nel seguente modo: si determina l'equazione della retta ME, asse del lato BC, e l'equazione della retta GF, asse del lato AC; mettendo a sistema le equazioni delle due rette si ricavano le coordinate del circocentro.

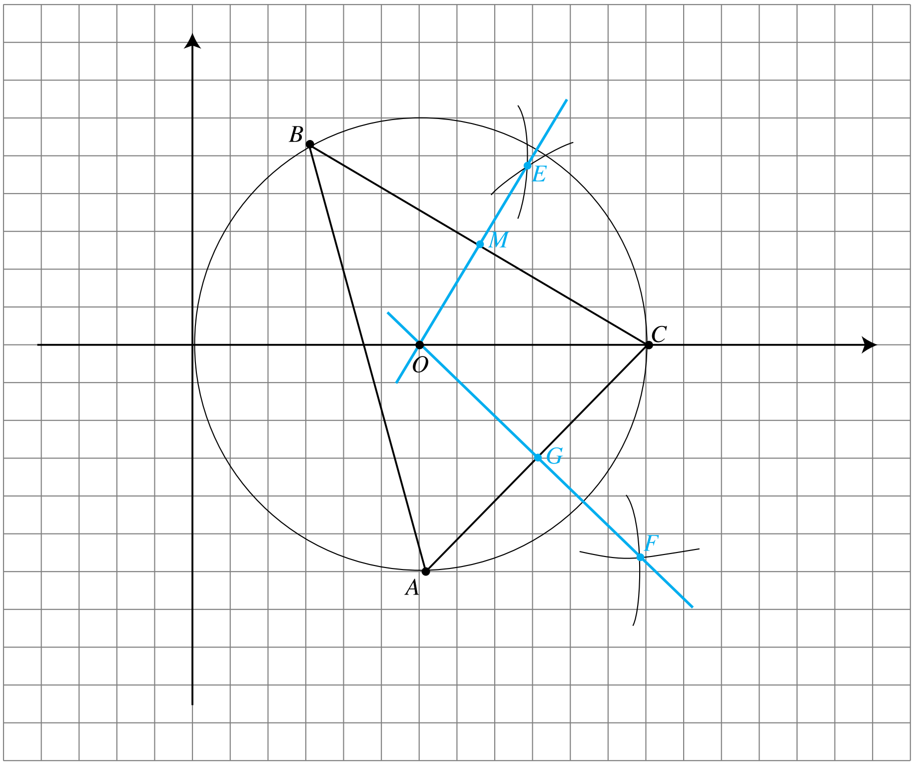


Fig. 10 ▶

1) coordinate del punto medio M del lato BC

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\sqrt{3}+0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M\left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

2) coefficiente angolare della retta BC

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\sqrt{3}-0}{1-4} = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

3) coefficiente angolare dell'asse ME

$$m_{ME} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

4) coefficiente q dell'asse ME

$$q_{ME} = -m_{ME} \cdot x_M + y_M$$

$$q_{ME} = -\sqrt{3} \cdot \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3};$$

5) equazione dell'asse *ME*

$$y = m_{ME}x + q_{ME}$$

$$\boxed{y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}}\ ;$$

6) coordinate del punto medio *G* del lato *AC*

$$x_G = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_G = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$G\,(3;\ -1);$$

7) coefficiente angolare della retta *AC*

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2-0}{2-4} = 1;$$

8) coefficiente angolare dell'asse *GF*

$$m_{GF} = -\frac{1}{m_{AC}} = -1;$$

9) coefficiente q dell'asse *GF*

$$q_{GF} = -m_{GF} \cdot x_G + y_G$$

$$q_{GF} = -(-1) \cdot 3 + (-1) = 2;$$

10) equazione dell'asse *GF*

$$y = m_{GF}x + q_{GF}$$

$$\boxed{y = -x + 2}\ ;$$

11) punto *O* di intersezione tra i due assi *ME*, *GF* (circocentro):

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = -x + 2$$

$$\sqrt{3}x + x = 2\sqrt{3} + 2$$

$$x \cdot (\sqrt{3} + 1) = 2\,(\sqrt{3} + 1)$$

$$x = 2;$$

per determinare l'ordinata del punto *O* si può utilizzare indifferentemente l'equazione dell'asse *ME* o l'equazione dell'asse *GF* ottenendo

$$y = 0$$

12) le coordinate del circocentro sono quindi

$$\boxed{O\,(2\ ;\ 0)}\ ;$$

13) il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo è

$$r = \overline{OC} = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(2-4)^2} = 2\,,$$

o anche

$$r = \overline{OB} = \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2\,,$$

o anche

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (0+2)^2} = 2\,;$$

14) l’equazione della circonferenza circoscritta al triangolo è

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 = (2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x = 0}$$

È bene prestare attenzione a non confondere il circocentro O del triangolo con l’origine O' degli assi cartesiani.

1.6 Incentro di un triangolo qualunque

Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo è chiamato incentro. L’incentro I (Fig. 11) è equidistante dai tre lati del triangolo:

$$IN = IM = IL$$

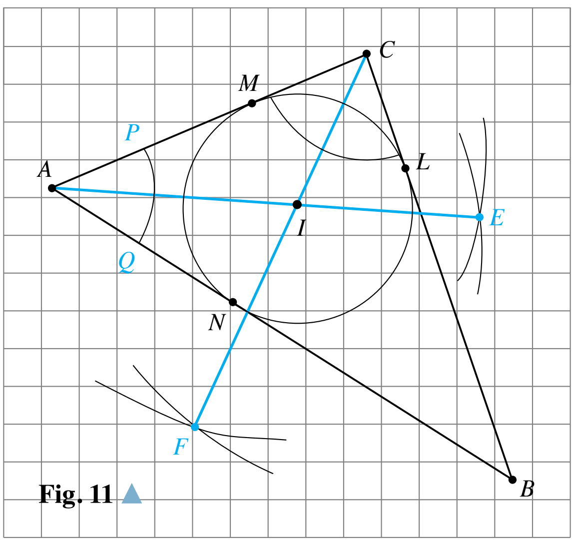


Fig. 11

essendo N, M, L i punti di tangenza tra la circonferenza e i lati $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ rispettivamente.

L’incentro è il punto d’incontro delle bisettrici.

Per individuare graficamente il punto I è sufficiente disegnare due bisettrici. Nella figura 11 sono state disegnate le bisettrici AE, CF degli angoli $B\hat{A}C$, $A\hat{C}B$ rispettivamente.

Per disegnare la bisettrice AE dell’angolo $B\hat{A}C$ si procede nel seguente modo: con centro in A e raggio arbitrario, si traccia un arco che interseca i lati $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ nei punti P e Q rispettivamente. Con centro in P e con apertura di compasso arbitraria si traccia un archetto; con centro in Q e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra in E l'archetto precedente. In modo analogo si procede per disegnare la bisettrice CF dell'angolo $A\hat{C}B$.

ESEMPIO

Determinare graficamente (Fig. 12) l'incentro *I* del triangolo di vertici

$$\boldsymbol{O\ (0\ ;\ 0)\ ,\quad A\ (8\ ;\ 0)\ ,\quad B\ (2\ ;\ 2\sqrt{3})}$$

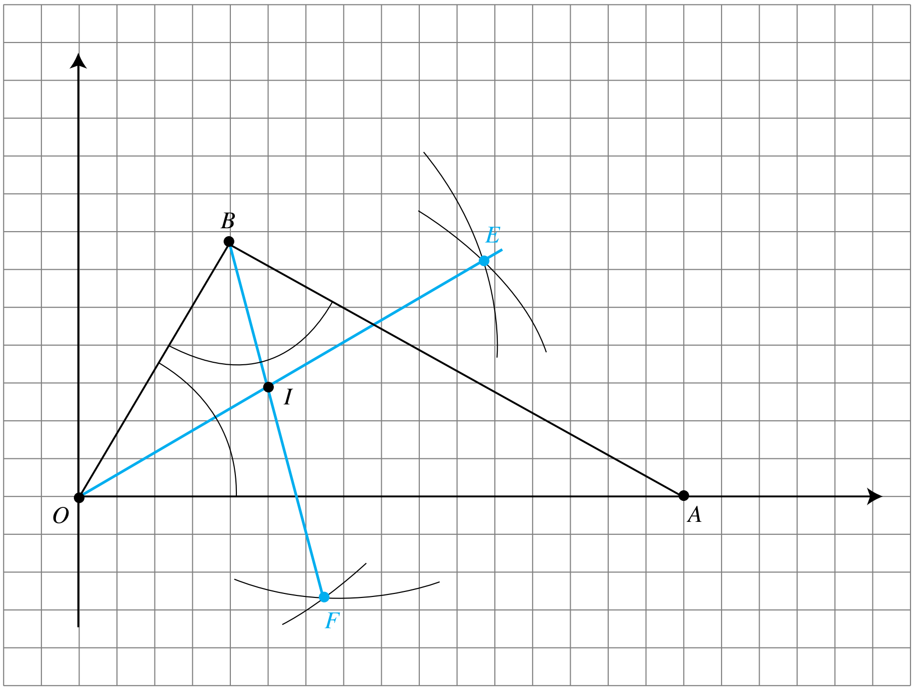


Fig. 12

Dopo aver tracciato la bisettrice OE dell'angolo $A\hat{O}B$ e la bisettrice BF dell'angolo $A\hat{B}O$, le coordinate approssimate dell'incentro I, lette direttamente sul diagramma cartesiano, risultano:

$$I = \left(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$$

ESEMPIO

Determinare analiticamente l'incentro *I* del triangolo di vertici (Fig. 13)

$$\boldsymbol{O\ (0\ ;\ 0)\ ,\quad A\ (8\ ;\ 0)\ ,\quad B\ (4\ ;\ 4\sqrt{3})}$$

Per determinare analiticamente le coordinate dell'incentro I occorre mettere a sistema le equazioni di due bisettrici.

Nel nostro caso mettiamo a sistema le equazioni delle bisettrici OE, AF degli angoli $A\hat{O}B$, $O\hat{A}B$ rispettivamente.

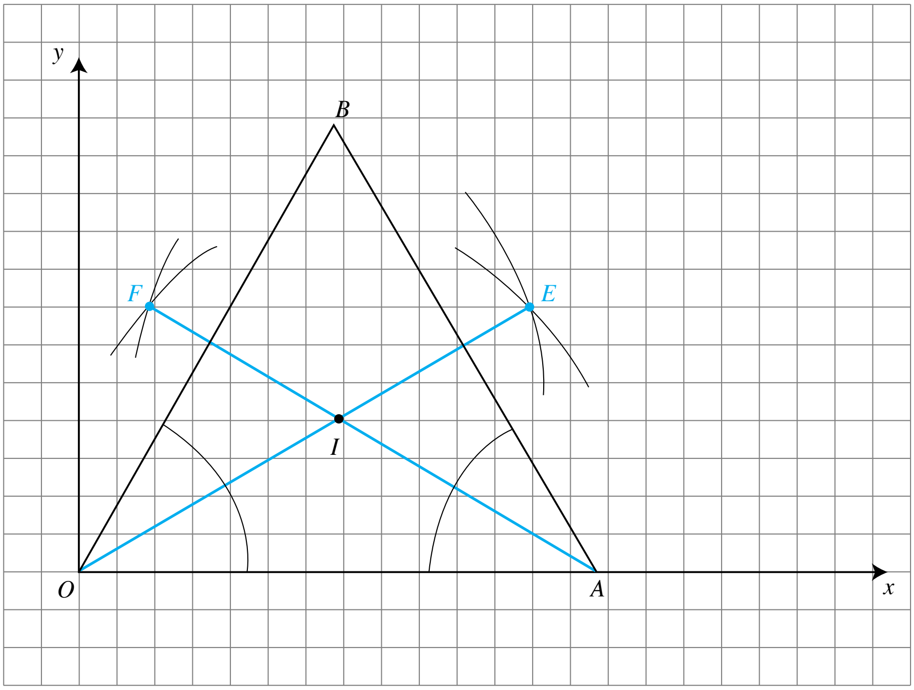


Fig. 13 ▶

Si procede nel seguente modo:

1) equazione della retta OB:

$$y = mx + q$$

$$m = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$q = 0$ (la retta OB passa per l'origine),

$$\boxed{y = \sqrt{3}x}$$

2) Un generico punto $P\,(x\ ,\ y)$, appartenente alla bisettrice OE, è equidistante dalla retta OB di equazione $y = \sqrt{3}x$ e dalla retta OA di equazione $y = 0$. Ricordando la formula della distanza di un punto $P\,(x\ ,\ y)$ da una retta $y = mx + q$

$$d = \frac{|y - mx - q|}{\sqrt{1 + m^2}},$$

le distanze del generico punto P dalla retta $y = \sqrt{3}x$ e dalla retta $y = 0$ risultano rispettivamente:

$$d_1 = \frac{|y - \sqrt{3}x|}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}|y - \sqrt{3}x|;$$

$$d_2 = |y|,$$

ed uguagliandole

$$\boxed{\frac{1}{2}|y-\sqrt{3}x| = |y|} \qquad (1)$$

3) Togliendo i valori assoluti della (1) senza cambiare i segni, si ottiene un'equazione con coefficiente angolare negativo:

$$\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}x=y$$

$$\frac{1}{2}y-y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y=-\sqrt{3}x$$

Questa non può essere l'equazione della bisettrice *OE*. Osservando la figura 13 si vede, infatti, che la bisettrice *OE* forma un angolo acuto con l'asse delle ascisse, e, quindi, l'equazione di *OE* ha coefficiente angolare positivo.
Togliendo i valori assoluti della (1) e cambiando il segno del secondo membro si ha:

$$\frac{1}{2}(y-\sqrt{3}x)=-y$$

$$\frac{1}{2}y+y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\frac{3}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{3}x}$$

che è l'equazione della bisettrice *OE*.

4) L'equazione della retta *AB* è:

$$y+mx+q$$

$$m=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{0-4\sqrt{3}}{8-4}=-\sqrt{3},$$

$$q=-mx_A+y_A$$

$$q=-(-\sqrt{3})\cdot 8+0=8\sqrt{3},$$

$$\boxed{y=-\sqrt{3}x+8\sqrt{3}}$$

5) Le distanze del generico punto $Q\,(x,\ y)$, appartenente alla bisettrice AF, dalle rette $y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$ e $y = 0$ risultano rispettivamente:

$$d_1 = \frac{|y - (-\sqrt{3})x - 8\sqrt{3}|}{\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}|y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}|\ ;$$

$$d_2 = |y|\ ,$$

ed uguagliandole

$$\boxed{\frac{1}{2}|y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}| = |y|} \qquad (2)$$

6) Togliendo i valori assoluti della (2) senza cambiare i segni, si ottiene un'equazione con coefficiente angolare positivo; infatti:

$$\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}) = y$$

$$\frac{1}{2}y - y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}$$

Questa non può essere l'equazione della bisettrice AF.
Osservando la figura 13 si vede, infatti, che la bisettrice AF forma un angolo ottuso con l'asse delle ascisse e, quindi, l'equazione di AF ha coefficiente angolare negativo.
Togliendo i valori assoluti della (2) e cambiando il segno del secondo membro si ha:

$$\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}) = -y$$

$$\frac{1}{2}y + y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}$$

$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8}{3}\sqrt{3}}$$

che è l'equazione della bisettrice AF.

7) Risolvendo il sistema delle equazioni delle due bisettrici OE, AF, si ha:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -x + 8$$

$$2x = 8$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

che sono le coordinate dell'incentro

$$\boxed{I\left(4\ ;\ \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)},$$

come si può verificare direttamente nella figura 13.
Si noti, infine, che il triangolo OAB è equilatero.

1.7 Costruire il triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° e determinare le aree dei segmenti circolari

Sia nota la misura $\overline{AB}$ dell'ipotenusa (Fig. 14) del triangolo rettangolo. Con centro nel punto medio M di $\overline{AB}$ e raggio pari alla metà di $\overline{AB}$, si traccia la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}$. Con centro in B e raggio pari ancora alla metà di $\overline{AB}$, si interseca la semicirconferenza nel punto C. Gli angoli del triangolo ABC risultano:

$$A\hat{C}B = 90° \quad , \quad B\hat{A}C = 30° \quad , \quad A\hat{B}C = 60°$$

Indicando con r il raggio, i lati del triangolo risultano:

$$\text{ipotenusa} = \overline{AB} = 2r$$

$$\text{cateto minore} = \overline{BC} = r$$

$$\text{cateto maggiore} = \overline{AC} = \sqrt{3}r$$

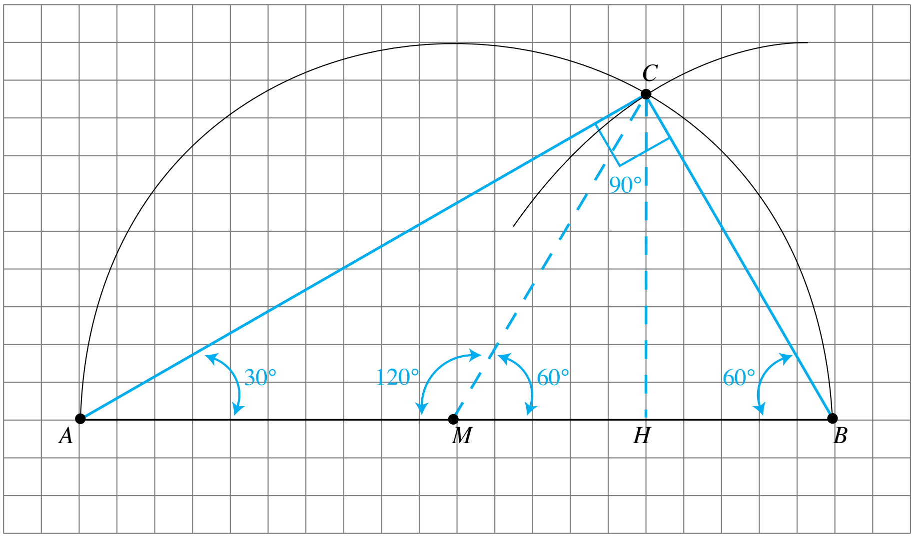


Fig. 14 ▶

Il perimetro $2p$ e l'area S del triangolo ABC, espressi in funzione del raggio r della circonferenza circoscritta, risultano:

$$2p = 2r + r + \sqrt{3}r$$

$$2p = 3r + \sqrt{3}r$$

$$\boxed{2p = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} + 1)\,r}\ ;$$

$$S = \frac{1}{2}\,\overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot r$$

$$\boxed{S = \frac{\sqrt{3}}{2}\,r^2}$$

Unendo il vertice C con il punto medio M dell'ipotenusa $\overline{AB}$, il triangolo rettangolo ABC si scompone nei due triangoli MBC e AMC.

Il triangolo MBC è equilatero con lato uguale al raggio

$$r = \overline{MB} = \overline{BC} = \overline{MC},$$

mentre il triangolo AMC è isoscele con lati

$$\overline{AM} = \overline{MC} = r$$

$$\overline{AC} = \sqrt{3}r$$

L'altezza $\overline{HC}$ si ottiene come rapporto tra il prodotto dei cateti e l'ipotenusa (infatti $\overline{BC} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{HC} = 2S$, dove S è la superficie del triangolo):

$$\overline{HC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{r \cdot \sqrt{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$$

Tenendo presente che $\overline{HC}$, oltre ad essere altezza, è anche mediana della base MB del triangolo equilatero MBC, si ha:

$$\overline{HM} = \overline{HB} = \frac{1}{2} r$$

L'area S_1 del triangolo equilatero MBC risulta

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{MB} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

L'area S_2 del settore circolare MCB è la sesta parte dell'area del cerchio:

$$S_2 = \frac{1}{6} \cdot \pi r^2$$

L'area S_3 del segmento circolare individuato dalla corda $\overline{BC}$ è uguale alla differenza tra l'area S_2 del settore circolare MBC e l'area S_1 del triangolo MBC:

$$S_3 = S_2 - S_1$$

$$S_3 = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$\boxed{S_3 = \frac{1}{2} r^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$$

L'area S_4 del triangolo isoscele AMC si può ottenere come differenza tra l'area S del triangolo ABC e l'area S_1 del triangolo MBC:

$$S_4 = S - S_1$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$\boxed{S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2} \;;$$

pertanto, i due triangoli AMC e MBC hanno la stessa area.

L'area S_5 del settore circolare MAC è un terzo dell'area del cerchio:

$$S_5 = \frac{1}{3} \pi r^2$$

L'area S_6 del segmento circolare individuato dalla corda $\overline{AC}$ è uguale alla differenza tra l'area S_5 del settore circolare MAC e l'area S_4 del triangolo MAC:

$$S_6 = S_5 - S_4$$

$$S_6 = \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$\boxed{S_6 = r^2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)}$$

1.8 Costruire il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza ed esprimere l'area del triangolo e l'area del segmento circolare in funzione del raggio

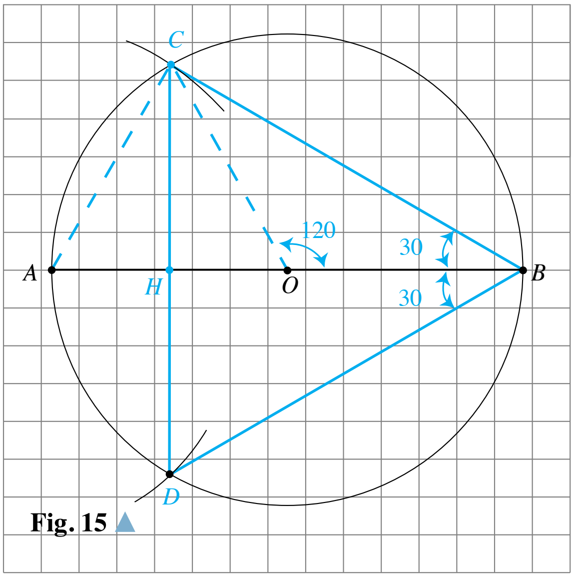


Fig. 15

Disegnata la circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, con centro in A e apertura di compasso ancora uguale al raggio r, si interseca la circonferenza nei punti C, D opposti rispetto al diametro $\overline{AB}$. Unendo C con B, D con B e C con D si ottiene il triangolo equilatero CDB (Fig. 15).

Il triangolo ABC è rettangolo con:

ipotenusa = $\overline{AB} = 2r$

cateto minore = $\overline{AC} = r$

cateto maggiore = $\overline{BC} = \sqrt{3}r$

Perciò: il lato del triangolo equilatero

$$l = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

è pari a $\sqrt{3}$ per il raggio r della circonferenza circoscritta:

$$\boxed{l = \sqrt{3}r}$$

L'altezza $h = \overline{HB}$ del triangolo equilatero è

$$h = \sqrt{(\sqrt{3}r)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2} \quad \text{(per il teorema di Pitagora)}$$

$$h = \sqrt{3r^2 - \frac{3}{4}r^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{12r^2 - 3r^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{9}{4}r^2}$$

$$h = \frac{3}{2}r \ ;$$

allo stesso risultato si perviene ricordando che

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l,$$

ed esprimendo l in funzione del raggio:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}r$$

$$\boxed{h = \frac{3}{2}r}$$

L'area S del triangolo equilatero, espressa in funzione del raggio, risulta essere:

$$S = \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot \overline{HB}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{3}r \cdot \frac{3}{2}r$$

$$\boxed{S = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2}$$

Ogni lato del triangolo equilatero individua un segmento circolare la cui area è $\frac{1}{3}$ della differenza tra l'area del cerchio e l'area del triangolo equilatero:

$$S_1 = \text{area segmento circolare} = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2\right)$$

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{3}r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$$

L'area S_2 del triangolo isoscele OBC è

$$S_2 = \frac{1}{2}\overline{BO} \cdot \overline{HC}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}r$$

$$\boxed{S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2}$$

L'area del settore circolare OBC (terza parte del cerchio) è

$$S_3 = \frac{1}{3}\pi r^2$$

L'area S_1 del segmento circolare individuato dalla corda $\overline{BC}$ è uguale alla differenza tra l'area S_3 del settore circolare OBC e l'area S_2 del triangolo isoscele OBC:

$$S_1 = S_3 - S_2$$

$$S_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$\boxed{S_1 = \frac{1}{3} r^2 \cdot \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$$

risultato già ottenuto per altra via.

1.9 Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali

Per costruire l'angolo retto, con centro in O e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano l'asse x nei punti C, D opposti rispetto ad O. Con centro in C e raggio arbitrario, ma maggiore di $\overline{OC}$, si traccia un archetto e con centro in D e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra il precedente nel punto E (Fig. 16).

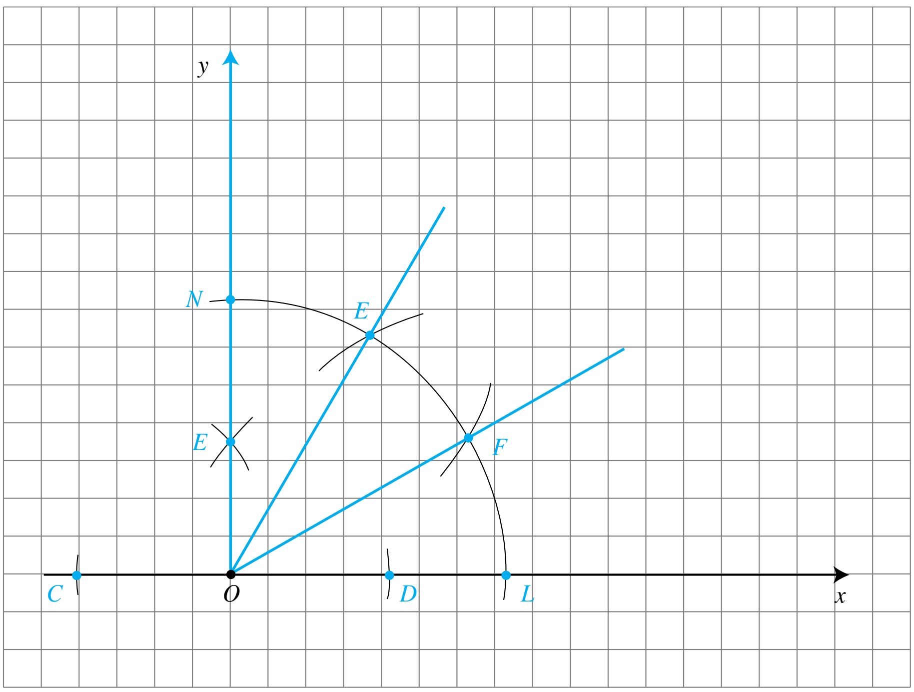


Fig. 16 ▶

Ora procediamo per dividere l'angolo retto $E\hat{O}D$ in tre parti uguali. Con centro in O e raggio arbitrario tracciamo il quarto di circonferenza che interseca gli assi x e y nei punti L, N rispettivamente. Con centro in L e con lo stesso raggio, intersechiamo il quarto di circonferenza in E. Con centro in N e con lo stesso raggio, intersechiamo il quarto di circonferenza in F. Le semirette OF, OE dividono l'angolo retto in 3 parti uguali:

$$L\hat{O}F = F\hat{O}E = E\hat{O}N = 30°$$

La retta OF forma un angolo di 30° con l'asse x, e, perciò, il suo coefficiente angolare è

$$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e la sua equazione

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{3}x}$$

La retta OE forma un angolo di 60° con l'asse x, e, perciò, il suo coefficiente angolare è

$$m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

e la sua equazione

$$\boxed{y = \sqrt{3}x}$$

ESEMPIO

Determinare le coordinate dei punti di intersezione F, E (primo quadrante) tra la circonferenza con centro nell'origine e raggio r e le rette di equazione

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad , \quad y = \sqrt{3}x \ \text{ rispettivamente.}$$

L'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio r è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

si ottengono le coordinate del punto F:

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x^2 = r^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{3}{4}r^2$$

$$\boxed{x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}r}$$

e considerando solamente la soluzione positiva

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

si ha:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$y = \frac{1}{2} r$$

In definitiva

$$\boxed{F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r \ ; \ \frac{1}{2} r\right)}$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \sqrt{3}\, x \end{cases}$$

si ottengono le coordinate del punto E:

$$x^2 + (\sqrt{3}\, x)^2 = r^2$$

$$x^2 + 3x^2 = r^2$$

$$4x^2 = r^2$$

$$\boxed{x = \pm \frac{1}{2} r}$$

e considerando solamente la soluzione positiva si ha:

$$y = \sqrt{3} x = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

In definitiva

$$\boxed{E\left(\frac{1}{2} r \ ; \ \frac{\sqrt{3}}{2} r\right)}$$

Con $r = 1$, l'ascissa e l'ordinata del punto $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \ \frac{1}{2}\right)$ sono rispettivamente il *coseno* e il *seno* dell'angolo $\frac{\pi}{6} = 30°$.

Con $r = 1$, l'ascissa e l'ordinata del punto $E\left(\frac{1}{2} \ ; \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sono rispettivamente il *coseno* e il *seno* dell'angolo $\frac{\pi}{3} = 60°$.