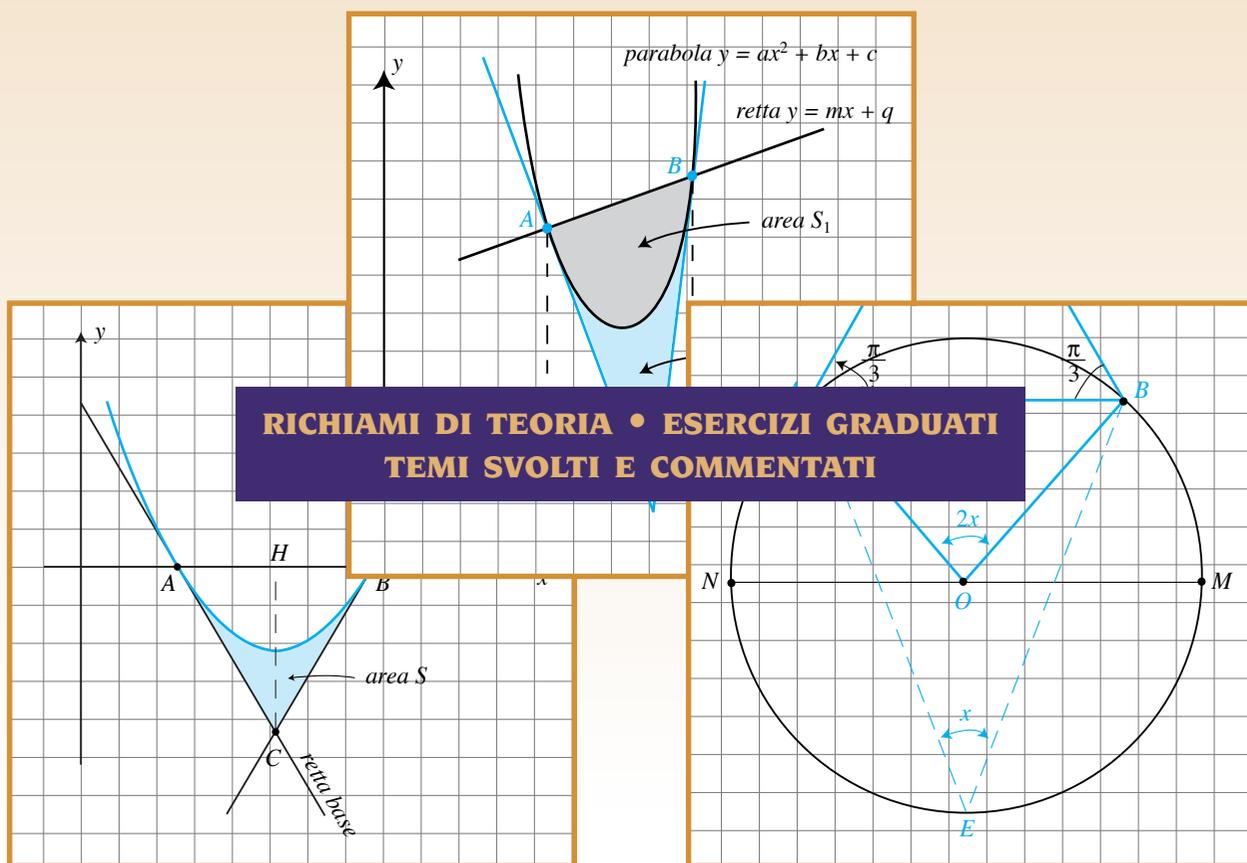


Giorgio Valdes

# La prova scritta di matematica

per i Licei Scientifici



edisco

La prova scritta di  
**matematica**



**Giorgio Valdes**

# La prova scritta di **matematica**

per i Licei Scientifici

**RICHIAMI DI TEORIA • ESERCIZI GRADUATI  
TEMI SVOLTI E COMMENTATI**



*Disegni, fotocomposizione e impaginazione.* C.G.M. - Napoli

È vietata la riproduzione, anche parziale ad uso interno o didattico, con qualsiasi mezzo, comprese le stampe, copie fotostatiche; microfilm e memorizzazione elettronica, se non autorizzata. L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore ad un decimo del presente volume, fatto salvo quanto previsto dalla legge 633/41 sul diritto d'autore. Le richieste andranno inoltrate presso la sede della Casa Editrice.

**Proprietà letteraria e scientifica riservata**

**Copyright © Edisco Editrice**

**Torino - 10128 Via Pastrengo, 28**

**Tel. 011.547880**

**Fax 011.5175396**

**e-mail: [info@edisco.it](mailto:info@edisco.it)**

**[www.edisco.it](http://www.edisco.it)**

Stampato presso: Officine Grafiche Editoriali Zeppegno (TO)

Ristampa

5 4 3 2 1 0

# Indice

## Parte prima

### RICHIAMI TEORICI CON ESERCITAZIONI E FORMULARIO

12	1.1	Dato un segmento costruire il suo asse
12	1.2	Per un punto condurre la perpendicolare ad una retta data
13	1.3	Costruire la bisettrice di un angolo dato
13	1.4	Costruire il triangolo equilatero e le relative circonferenze circoscritta e inscritta
14	1.5	Circocentro di un triangolo qualunque
18	1.6	Incentro di un triangolo qualunque
23	1.7	Costruire il triangolo rettangolo con angoli di $30^\circ$ e $60^\circ$ e determinare le aree dei segmenti circolari
26	1.8	Costruire il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza ed esprimere l'area del triangolo e l'area del segmento circolare in funzione del raggio
28	1.9	Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali
31	1.10	Divisione dell'angolo retto in quattro parti uguali
34	1.11	Divisione dell'angolo retto in sei parti uguali
39	1.12	Costruire la circonferenza tangente in un punto ad una retta data e passante per un altro punto esterno alla tangente
42	1.13	Teoremi di Euclide
50	1.14	Circonferenza e cerchio. Teorema della corda
56	1.15	Teorema delle corde
61	1.16	Teorema delle secanti
64	1.17	Teorema della tangente
68	1.18	Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo. Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo
74	1.19	Angolo tra due rette
77	1.20	Disegnare la parabola noto il vertice e un suo punto
82	1.21	Disegno dell'ellisse noti gli assi
83	1.22	Formule utilizzate frequentemente negli esercizi

## Parte seconda

### PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

104	2.1	Triangoli rettangoli con la stessa ipotenusa
108	2.2	Triangoli isosceli inscritti in una circonferenza
112	2.3	Trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza
116	2.4	Somma delle aree di due triangoli equilateri
120	2.5	Trapezio isoscele circoscritto ad una circonferenza

124	2.6	Diagonale del rettangolo avente per basi una corda e la tangente alla circonferenza
128	2.7	Triangoli isosceli di perimetro assegnato
132	2.8	Somma dei quadrati delle distanze di un punto sulla semicirconferenza da due punti assegnati
136	2.9	Punto di un segmento per il quale è massimo il prodotto delle distanze dagli estremi
140	2.10	Trapezio isoscele inscritto nella semiellisse
146	2.11	Segmento intercettato dagli assi sulla tangente a un'iperbole
150	2.12	Punto di una parabola più vicino ad una retta data
153	2.13	Quadrilatero inscritto tra due parabole
158	2.14	Rettangolo inscritto tra due parabole e l'asse delle ascisse
163	2.15	Triangolo rettangolo individuato dagli assi e dalla tangente ad una parabola
168	2.16	Rettangolo inscritto tra una parabola e l'asse delle ascisse
172	2.17	Rettangolo inscritto tra la parabola generica e l'asse delle ascisse
177	2.18	Somma dei quadrati delle corde staccate su due circonferenze tangenti internamente
182	2.19	Corde staccate su un'ellisse da due rette perpendicolari

## Parte terza

### ALCUNI TEMI D'ESAME SUI MASSIMI E MINIMI

188	3.1	Anno scolastico 1980/81 - <i>Sessione ordinaria</i>
197	3.2	Anno scolastico 1974/75 - <i>Sessione suppletiva</i>
205	3.3	Anno scolastico 1990/91 - <i>Sessione suppletiva</i>
211	3.4	Anno scolastico 1976/77 - <i>Sessione ordinaria</i>
220	3.5	Anno scolastico 1977/78 - <i>Sessione ordinaria</i>
228	3.6	Anno scolastico 1978/79 - <i>Sessione ordinaria</i>
234	3.7	Anno scolastico 1977/78 - <i>Sessione suppletiva</i>

## Parte quarta

### PROBLEMI TRIGONOMETRICI

242	4.1	Rettangolo inscritto in una circonferenza
247	4.2	Trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza
253	4.3	Triangolo isoscele circoscritto a una circonferenza
258	4.4	Diagonale del rettangolo avente per basi una corda e la tangente alla circonferenza
261	4.5	Funzione somma dell'altezza relativa all'ipotenusa e della proiezione di un cateto
266	4.6	Corde staccate su due semicirconferenze
270	4.7	Semicirconferenza e retta esterna perpendicolare al prolungamento del diametro
277	4.8	Somma dei quadrati dei lati del triangolo isoscele
281	4.9	Rapporto tra le aree di due triangoli rettangoli
286	4.10	Triangoli con vertici sull'ellisse e sulla circonferenza
292	4.11	Area di un quadrilatero
298	4.12	Differenza delle aree di due triangoli isosceli con base comune e inscritti in una circonferenza

- 304 4.13 Triangoli con due vertici bloccati e un vertice mobile sull'arco di circonferenza  
308 4.14 Perimetro massimo di un quadrilatero

## Parte quinta

### ALCUNI TEMI D'ESAME DI TIPO TRIGONOMETRICO

- 316 5.1 Anno scolastico 1989/90 - *Sessione suppletiva*  
322 5.2 Anno scolastico 1989/90 - *Sessione suppletiva*  
326 5.3 Anno scolastico 1974/75 - *Sessione ordinaria*  
332 5.4 Anno scolastico 1988/89 - *Sessione ordinaria*

## Parte sesta

### FUNZIONI CON PARAMETRI

- 338 6.1 Funzione pari razionale fratta con un parametro  
343 6.2 Equazione della parabola note due rette tangenti e la misura di una corda  
349 6.3 Equazione della cubica noti due suoi estremi  
355 6.4 Funzione pari razionale fratta con due parametri  
360 6.5 Funzione dispari razionale fratta con due parametri  
366 6.6 Fascio di parabole con due punti base. Condizione di perpendicolarità tra le tangenti nei punti base  
370 6.7 Fascio di parabole con un punto base

## Parte settima

### ALCUNI TEMI D'ESAME SULLE FUNZIONI CON PARAMETRI

- 378 7.1 Anno scolastico 1981/82 - *Sessione ordinaria*  
385 7.2 Anno scolastico 1977/78 - *Sessione ordinaria*  
390 7.3 Anno scolastico 1977/78 - *Sessione suppletiva*  
397 7.4 Anno scolastico 1986/87 - *Sessione ordinaria*  
404 7.5 Anno scolastico 1988/89 - *Sessione ordinaria*  
409 7.6 Anno scolastico 1989/90 - *Sessione ordinaria*  
414 7.7 Anno scolastico 1982/83 - *Sessione ordinaria*  
417 7.8 Anno scolastico 1982/83 - *Sessione ordinaria*  
424 7.9 Anno scolastico 1996/97 - *Sessione ordinaria*

## Parte ottava

### CALCOLO DI AREE E DI VOLUMI

- 436 8.1 Area del segmento parabolico  
439 8.2 Area tra parabola, retta e asse delle ascisse

## Indice

---

441	8.3	Area della regione di piano racchiusa tra due curve
444	8.4	Area del triangolo mistilineo formato dall'arco di parabola e dalle tangenti negli estremi dell'arco
448	8.5	Area della regione di piano racchiusa tra una curva e una parabola
453	8.6	Area della regione di piano delimitata da una curva e da una retta
459	8.7	Area della regione di piano racchiusa tra una circonferenza e una parabola
465	8.8	Volume di un solido di rotazione (funzione razionale intera)
468	8.9	Volume di un solido di rotazione (funzione irrazionale)
471	8.10	Area della regione di piano delimitata da: circonferenza, retta tangente, asse delle ascisse
476	8.11	Area della regione di piano delimitata da una curva e dalla retta passante per i suoi punti di massimo e minimo
480	8.12	Area della regione di piano delimitata da una curva e dalla parabola ad essa tangente nell'origine
485	8.13	Area tra circonferenza, parabola ad essa tangente e asse delle ascisse
490	8.14	Area di un triangolo mistilineo
494	8.15	Determinazione dell'equazione di una parabola conoscendo un punto, la retta tangente per quel punto e l'area del segmento parabolico
499	8.16	Area della regione di piano delimitata dagli assi e da una funzione razionale fratta
503	8.17	Area della regione di piano delimitata da una funzione razionale fratta e da un'iperbole
509	8.18	Volume del solido generato dalla rotazione di un segmento parabolico
511	8.19	Volumi di solidi di rotazione scomponibili

## Parte nona

### ALCUNI TEMI D'ESAME SUL CALCOLO DI AREE E DI VOLUMI

520	9.1	Anno scolastico 1986/87 - <i>Sessione ordinaria</i>
525	9.2	Anno scolastico 1987/88 - <i>Sessione ordinaria</i>
531	9.3	Anno scolastico 1988/89 - <i>Sessione ordinaria</i>
537	9.4	Anno scolastico 1990/91 - <i>Sessione suppletiva</i>
542	9.5	Anno scolastico 1980/81 - <i>Sessione ordinaria</i>
547	9.6	Anno scolastico 1997/98 - <i>Sessione ordinaria</i>

## Parte decima

### 555 ESERCIZI PROPOSTI

# Prefazione

Questo manuale è rivolto agli Studenti del quinto anno dei Licei Scientifici che devono prepararsi per la prova scritta di matematica dell'Esame di Stato.

L'opera, oltre a contenere una parte dedicata ai richiami teorici e al formulario, è suddivisa in quattro blocchi tematici:

- 1) problemi di massimo e minimo
- 2) problemi trigonometrici
- 3) funzioni con parametri
- 4) calcolo di aree e di volumi,

ciascuno dei quali è costituito da due parti:

- una serie di problemi di difficoltà crescente, aventi lo scopo di consolidare i concetti, attivare il processo di sintesi delle conoscenze, far acquisire piena padronanza delle tecniche di calcolo e delle metodologie risolutive;
- un gruppo di temi, scelti tra quelli proposti agli esami di maturità, risolti in modo lineare e graduale, con i richiami teorici necessari per motivare le scelte effettuate.

L'opera è strutturata in modo che gli Allievi trovino stimolante e gratificante risolvere problemi, pervenendo ad una visione d'insieme della matematica studiata nel quinquennio e all'acquisizione di una sicurezza metodologica adeguata per affrontare i temi Ministeriali.

Data la novità del testo così impostato, sarò grato ai Colleghi e agli Studenti che vorranno farmi pervenire le loro osservazioni e le loro critiche.

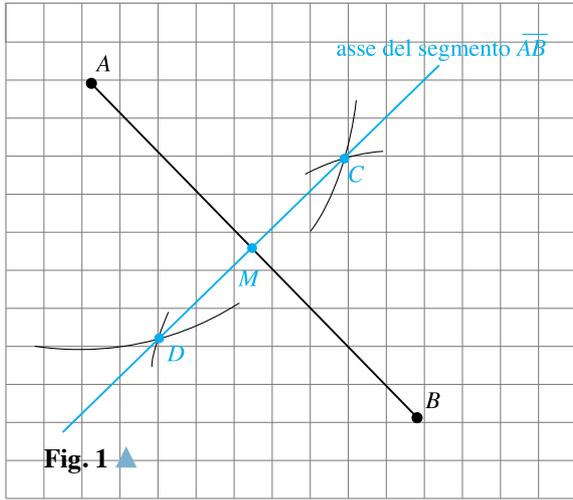
Ringrazio la Casa Editrice Edisco che ha curato in modo particolare la veste tipografica del testo, l'Editore per la fiducia e la stima che mi ha dimostrato e il Redattore per l'accurata revisione del manoscritto.

**Giorgio Valdes**



- 1.1 Dato un segmento costruire il suo asse
- 1.2 Per un punto condurre la perpendicolare ad una retta data
- 1.3 Costruire la bisettrice di un angolo dato
- 1.4 Costruire il triangolo equilatero e le relative circonferenze circoscritte e inscritte
- 1.5 Circocentro di un triangolo qualunque
- 1.6 Incentro di un triangolo qualunque
- 1.7 Costruire il triangolo rettangolo con angoli di  $30^\circ$  e  $60^\circ$  e determinare le aree dei segmenti circolari
- 1.8 Costruire il triangolo equilatero inscritto in una circonferenza ed esprimere l'area del triangolo e l'area del segmento circolare in funzione del raggio
- 1.9 Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali
- 1.10 Divisione dell'angolo retto in quattro parti uguali
- 1.11 Divisione dell'angolo retto in sei parti uguali
- 1.12 Costruire la circonferenza tangente in un punto ad una retta data e passante per un altro punto esterno alla tangente
- 1.13 Teoremi di Euclide
- 1.14 Circonferenza e cerchio. Teorema della corda
- 1.15 Teorema delle corde
- 1.16 Teorema delle secanti
- 1.17 Teorema della tangente
- 1.18 Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo. Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo
- 1.19 Angolo tra due rette
- 1.20 Disegnare la parabola noto il vertice e un suo punto
- 1.21 Disegno dell'ellisse noti gli assi
- 1.22 Formule utilizzate frequentemente negli esercizi

**1.1** Dato un segmento costruire il suo asse

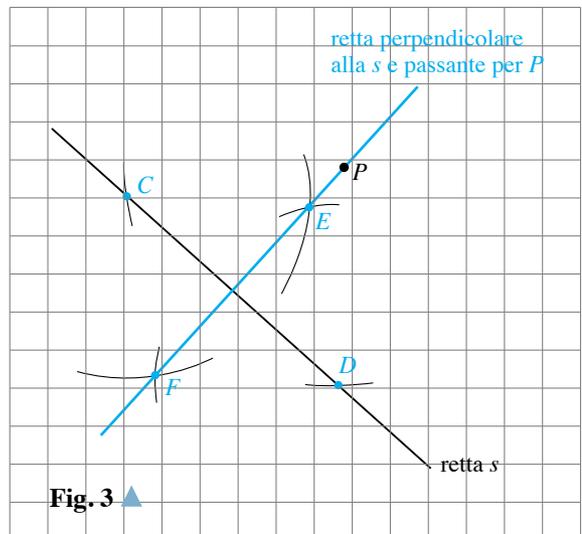
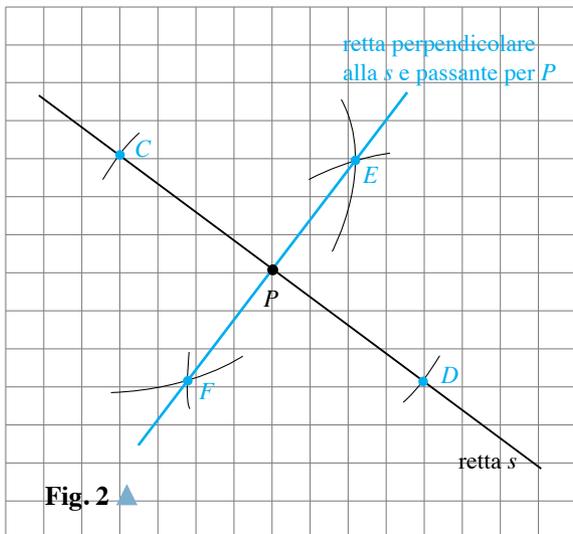


L'asse di un segmento  $\overline{AB}$  (Fig. 1) è la retta perpendicolare ad  $\overline{AB}$  passante per il suo punto medio  $M$ . Con centro in  $A$  e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di  $\overline{AB}$ , si tracciano due archetti da parti opposte rispetto ad  $\overline{AB}$ . Con centro in  $B$  e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in  $C$  e  $D$  rispettivamente. La retta  $\overline{CD}$  è l'asse del segmento  $\overline{AB}$ .

**1.2** Per un punto condurre la perpendicolare ad una retta data

Se il punto  $P$  appartiene alla retta  $s$ , con centro in  $P$  e con apertura di compasso arbitraria, si tracciano due archetti che intersecano la retta  $s$  in  $C$  e  $D$  rispettivamente (Fig. 2). Con centro in  $C$  e apertura di compasso arbitraria, ma maggiore della metà di  $\overline{CD}$ , si tracciano due archetti da parti opposte rispetto a  $\overline{CD}$ . Con centro in  $D$  e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in  $E, F$  rispettivamente. La retta  $\overline{EF}$  passa per il punto  $P$  ed è perpendicolare alla retta  $s$ .

Se il punto  $P$  è esterno alla retta  $s$  (Fig. 3), con centro in  $P$  e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano la retta  $s$  in  $C$  e  $D$ . Con



centro in  $C$  e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di  $\overline{CD}$ , si tracciano due archetti da parti opposte rispetto a  $\overline{CD}$ . Con centro in  $D$  e con lo stesso raggio si tracciano altri due archetti che incontrano gli archetti precedenti in  $E, F$  rispettivamente. La retta  $EF$  passa per il punto  $P$  ed è perpendicolare alla retta  $s$ .

**1.3** Costruire la bisettrice di un angolo dato

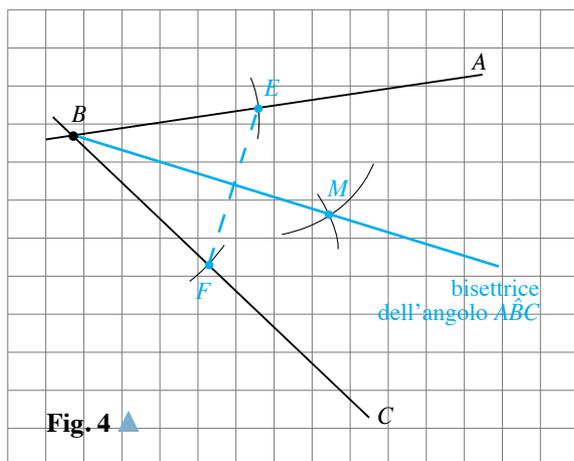


Fig. 4 ▲

Sia  $\hat{A}BC$  l'angolo dato (Fig. 4). Con centro in  $B$  e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano in  $E, F$  rispettivamente la retta  $BA$  e la retta  $BC$ . Con centro in  $E$  e con raggio arbitrario, ma maggiore della metà del segmento  $\overline{EF}$ , si traccia un archetto da parte opposta al punto  $B$ . Con centro in  $F$  e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra in  $M$  l'archetto precedente. La semiretta  $BM$  divide l'angolo dato  $\hat{A}BC$  in due parti uguali.  $BM$  è **asse** del segmento  $\overline{EF}$  e **bisettrice** dell'angolo dato  $\hat{A}BC$ .

**1.4** Costruire il triangolo equilatero e le relative circonferenze circoscritta e inscritta

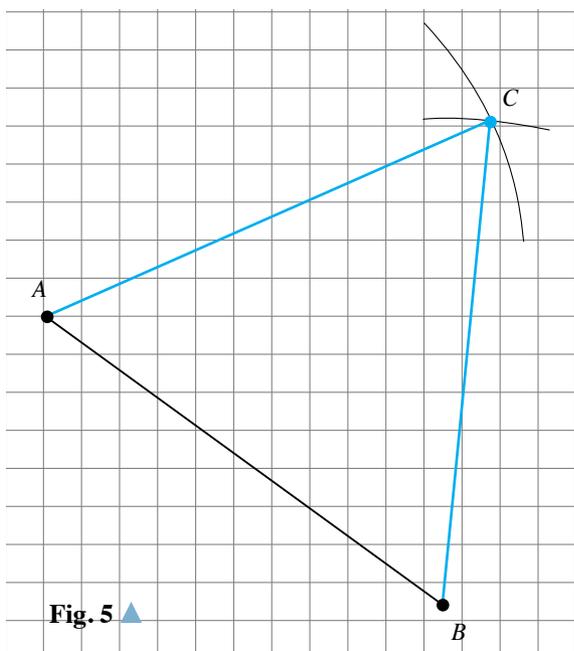


Fig. 5 ▲

Sia  $\overline{AB}$  uno dei lati del triangolo equilatero (Fig. 5). Con centro in  $A$  e con raggio uguale ad  $\overline{AB}$  si traccia un archetto e con centro in  $B$ , e raggio sempre uguale ad  $\overline{AB}$ , si traccia un altro archetto che interseca il precedente nel punto  $C$ . Il triangolo  $ABC$  è equilatero.

Il **circocentro** (centro della circonferenza circoscritta) è il punto d'incontro degli **assi** dei tre lati. È sufficiente tracciare due assi, ad esempio quelli relativi ai lati  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  (Fig. 6). Con centro in  $A$  e raggio arbitrario, ma maggiore della metà del lato  $\overline{AC}$ , si traccia un archetto esterno al triangolo. Con centro in  $C$  e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra il precedente nel punto  $E$ . La perpendicolare ad  $AC$  passante per  $E$  è l'asse del segmento  $AC$ . Analogamente, si determina l'asse  $HL$  del lato  $\overline{BC}$ . Il circocentro  $O$  è il punto d'incontro tra i

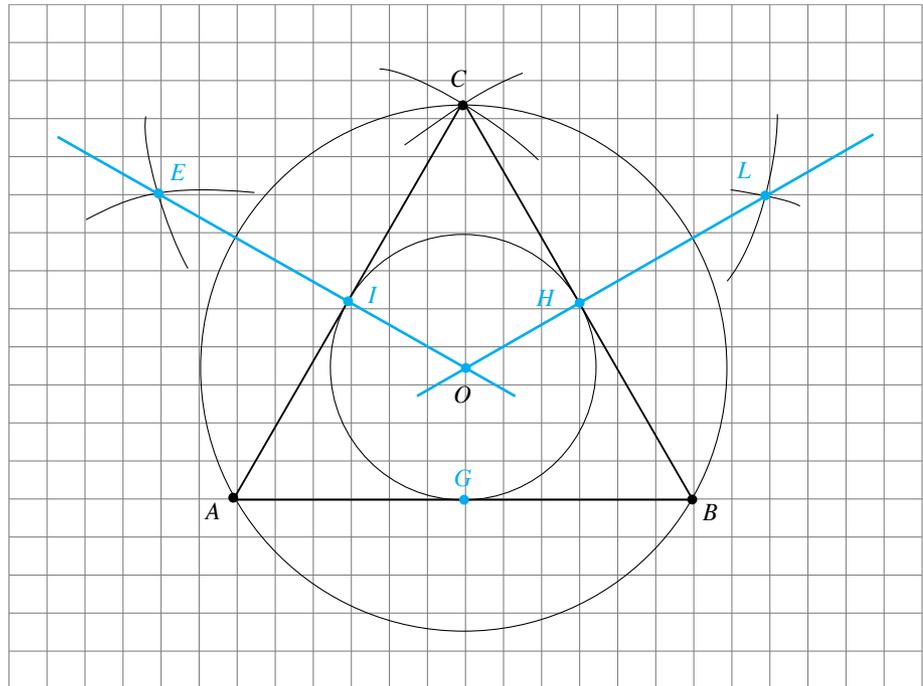


Fig. 6 ►

due assi  $EI, HL$ . Con centro in  $O$  si traccia la circonferenza di raggio  $\overline{OC}$  verificando il suo passaggio per i punti  $A, B$ . Trattandosi di un triangolo equilatero, il **circocentro**  $O$  è anche **incentro** (centro della circonferenza inscritta e punto di incontro delle tre bisettrici), **baricentro** (punto di incontro delle tre mediane), **ortocentro** (punto di incontro delle tre altezze). Con centro in  $O$  e raggio  $\overline{OH}$  si traccia la circonferenza inscritta nel triangolo che è tangente ai lati  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  nei punti  $H, I, G$  rispettivamente.

**1.5**

**Circocentro di un triangolo qualunque**

Il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo è chiamato **circocentro**.

Indicando con  $A, B, C$  i vertici del triangolo e con  $O$  il circocentro, si ha:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$

cioè: **il circocentro è equidistante dai tre vertici**.

Il circocentro è il punto d'incontro degli **assi** dei lati del triangolo. Per individuare graficamente il punto  $O$  è sufficiente disegnare due assi di due lati scelti arbitrariamente.

Per tracciare (Fig. 7) l'asse del lato  $\overline{AC}$ , con centro in  $A$  e raggio arbitrario, ma maggiore della metà di  $\overline{AC}$ , si traccia un archetto esterno al trian-

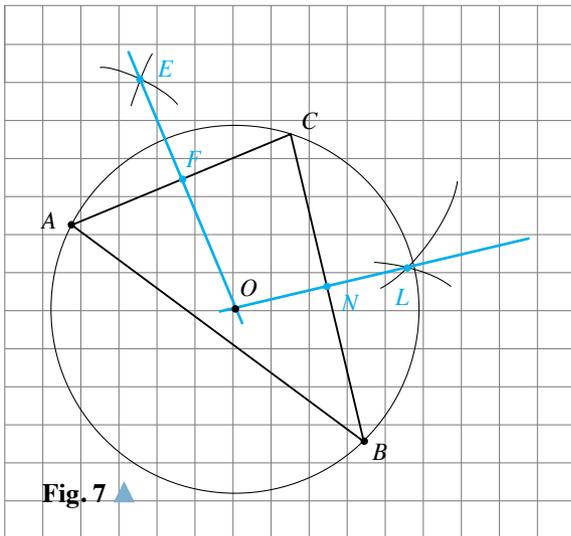
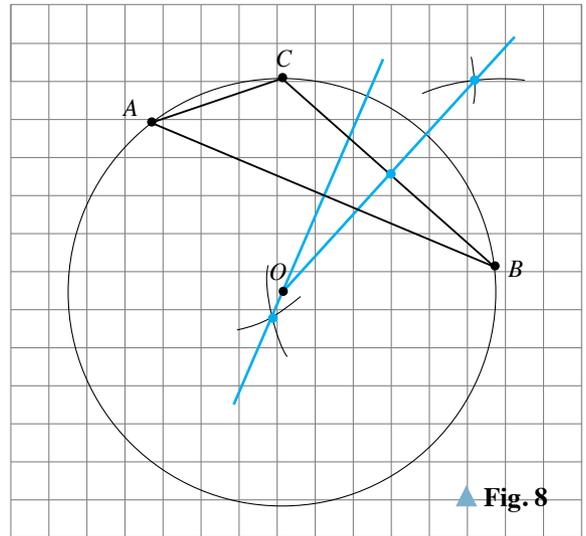


Fig. 7 ▲



▲ Fig. 8

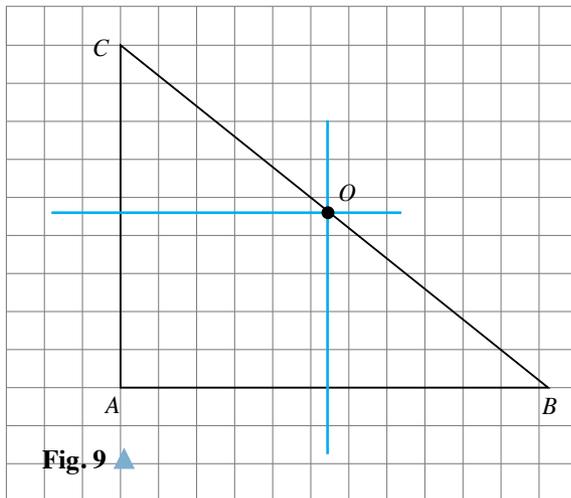


Fig. 9 ▲

golo; con centro in  $C$ , e con lo stesso raggio, si traccia un altro archetto che incontra nel punto  $E$  quello precedente. Individuato il punto medio  $F$  del lato  $AC$ , si traccia l'asse  $EF$ . Analogamente si traccia l'asse  $LN$  del lato  $\overline{BC}$ . Il circocentro  $O$  è il punto d'incontro tra i due assi  $EF, NL$ .

Con centro in  $O$  si disegna la circonferenza circoscritta al triangolo  $ABC$ .

Se il triangolo è **ottusangolo**, il **circocentro** è **esterno** al triangolo (Fig. 8).

Se il triangolo è **rettangolo**, il **circocentro** coincide con il punto medio dell'ipotenusa (Fig. 9).

**ESEMPIO**

**Determinare graficamente e analiticamente il circocentro del triangolo di vertici**

$$A(2; -2), \quad B(1; \sqrt{3}), \quad C(4; 0)$$

Graficamente (Fig. 10) si traccia l'asse  $ME$  del lato  $\overline{BC}$  e l'asse  $GF$  del lato  $\overline{AC}$ .

Il punto d'incontro tra i due assi  $ME$  e  $GF$  è il circocentro

$$O(2; 0)$$

Analiticamente si procede nel seguente modo: si determina l'equazione della retta  $ME$ , asse del lato  $BC$ , e l'equazione della retta  $GF$ , asse del lato  $AC$ ; mettendo a sistema le equazioni delle due rette si ricavano le coordinate del circocentro.

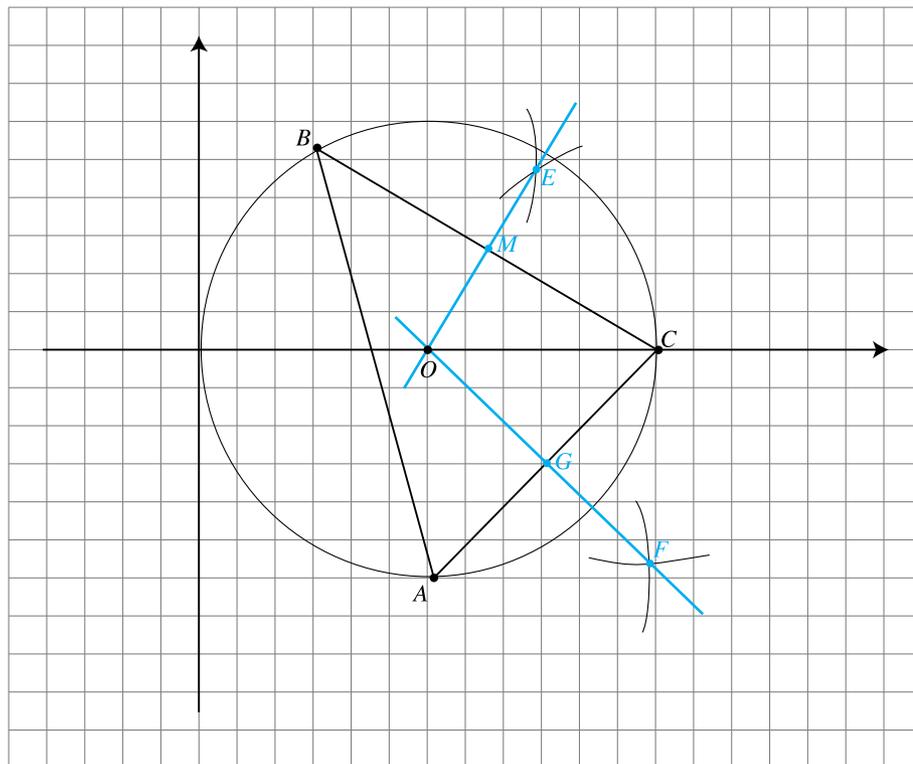


Fig. 10 ►

1) coordinate del punto medio  $M$  del lato  $BC$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{\sqrt{3} + 0}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

2) coefficiente angolare della retta  $BC$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\sqrt{3} - 0}{-1 - 4} = -\frac{\sqrt{3}}{5};$$

3) coefficiente angolare dell'asse  $ME$

$$m_{ME} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{5}{-\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3};$$

4) coefficiente  $q$  dell'asse  $ME$

$$q_{ME} = -m_{ME} \cdot x_M + y_M$$

$$q_{ME} = -\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{28\sqrt{3}}{6} = \frac{14\sqrt{3}}{3};$$

5) equazione dell'asse  $ME$

$$y = m_{ME}x + q_{ME}$$

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} ;$$

6) coordinate del punto medio  $G$  del lato  $AC$

$$x_G = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

$$y_G = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1$$

$$G(3; -1);$$

7) coefficiente angolare della retta  $AC$

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2 - 0}{2 - 4} = 1;$$

8) coefficiente angolare dell'asse  $GF$

$$m_{GF} = -\frac{1}{m_{AC}} = -1;$$

9) coefficiente  $q$  dell'asse  $GF$

$$q_{GF} = -m_{GF} \cdot x_G + y_G$$

$$q_{GF} = -(-1) \cdot 3 + (-1) = 2;$$

10) equazione dell'asse  $GF$

$$y = m_{GF}x + q_{GF}$$

$$y = -x + 2 ;$$

11) punto  $O$  di intersezione tra i due assi  $ME$ ,  $GF$  (circocentro):

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = -x + 2$$

$$\sqrt{3}x + x = 2\sqrt{3} + 2$$

$$x \cdot (\sqrt{3} + 1) = 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$x = 2;$$

per determinare l'ordinata del punto  $O$  si può utilizzare indifferentemente l'equazione dell'asse  $ME$  o l'equazione dell'asse  $GF$  ottenendo

$$y = 0$$

12) le coordinate del circocentro sono quindi

$$O(2; 0);$$

13) il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo è

$$r = \overline{OC} = \sqrt{(x_O - x_C)^2 + (y_O - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2} = 2,$$

o anche

$$r = \overline{OB} = \sqrt{(x_O - x_B)^2 + (y_O - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - \sqrt{3})^2} = 2,$$

o anche

$$r = \overline{OA} = \sqrt{(x_O - x_A)^2 + (y_O - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (0 + 2)^2} = 2;$$

14) l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo è

$$(x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x = 0$$

È bene prestare attenzione a non confondere il circocentro  $O$  del triangolo con l'origine  $O'$  degli assi cartesiani.

## 1.6

### Incentro di un triangolo qualunque

Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo è chiamato **incentro**. L'incentro  $I$  (Fig. 11) è equidistante dai tre lati del triangolo:

$$IN = IM = IL$$

essendo  $N, M, L$  i punti di tangenza tra la circonferenza e i lati  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$  rispettivamente.

L'incentro è il punto d'incontro delle **bisettrici**.

Per individuare graficamente il punto  $I$  è sufficiente disegnare due bisettrici. Nella figura 11 sono state disegnate le bisettrici  $AE, CF$  degli angoli  $\hat{B}AC, \hat{A}CB$  rispettivamente.

Per disegnare la bisettrice  $AE$  dell'angolo  $\hat{B}AC$  si procede nel seguente modo: con centro in  $A$  e raggio arbitrario, si traccia un arco che interseca i lati  $\overline{AC}$  e  $\overline{AB}$  nei punti  $P$  e  $Q$  rispettivamente. Con centro in  $P$  e con apertura di compasso arbitraria si traccia un archetto; con centro

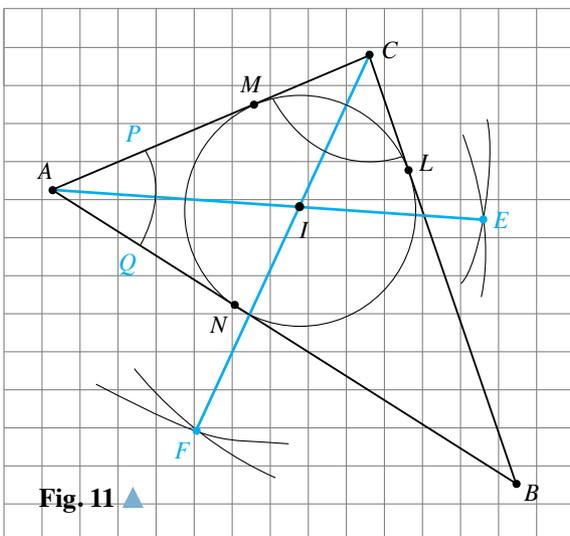


Fig. 11 ▲

in  $Q$  e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra in  $E$  l'archetto precedente. In modo analogo si procede per disegnare la bisettrice  $CF$  dell'angolo  $\hat{A}CB$ .

**ESEMPIO** Determinare graficamente (Fig. 12) l'incentro  $I$  del triangolo di vertici  $O(0; 0)$ ,  $A(8; 0)$ ,  $B(2; 2\sqrt{3})$

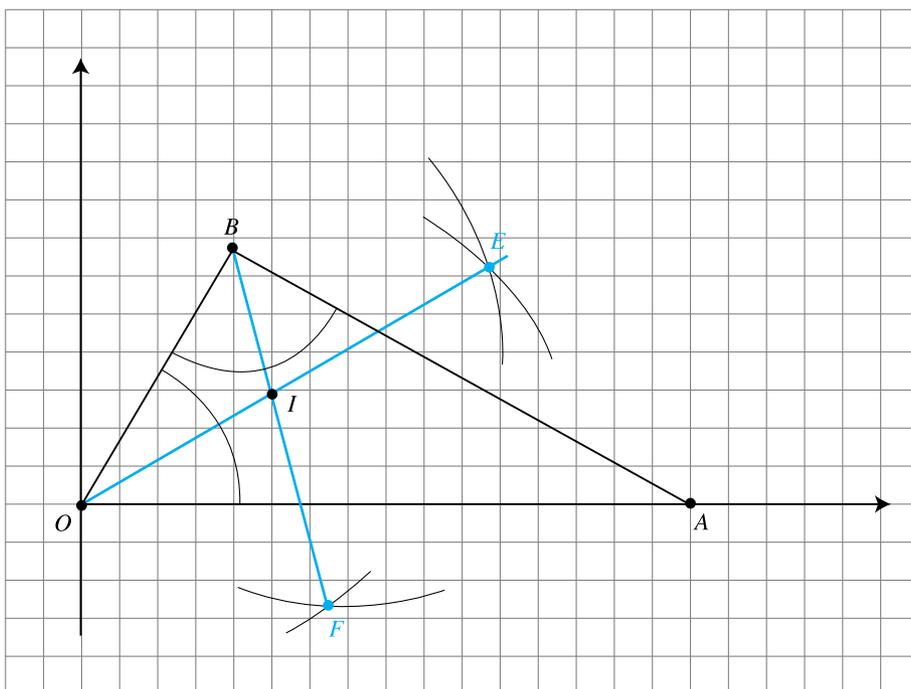


Fig. 12 ▶

Dopo aver tracciato la bisettrice  $OE$  dell'angolo  $\hat{A}OB$  e la bisettrice  $BF$  dell'angolo  $\hat{A}BO$ , le coordinate approssimate dell'incentro  $I$ , lette direttamente sul diagramma cartesiano, risultano:

$$I = \left( \frac{5}{2} ; \frac{3}{2} \right)$$

**ESEMPIO** Determinare analiticamente l'incentro  $I$  del triangolo di vertici (Fig. 13)  $O(0; 0)$ ,  $A(8; 0)$ ,  $B(4; 4\sqrt{3})$

Per determinare analiticamente le coordinate dell'incentro  $I$  occorre mettere a sistema le equazioni di due bisettrici.

Nel nostro caso mettiamo a sistema le equazioni delle bisettrici  $OE, AF$  degli angoli  $\hat{A}OB, O\hat{A}B$  rispettivamente.

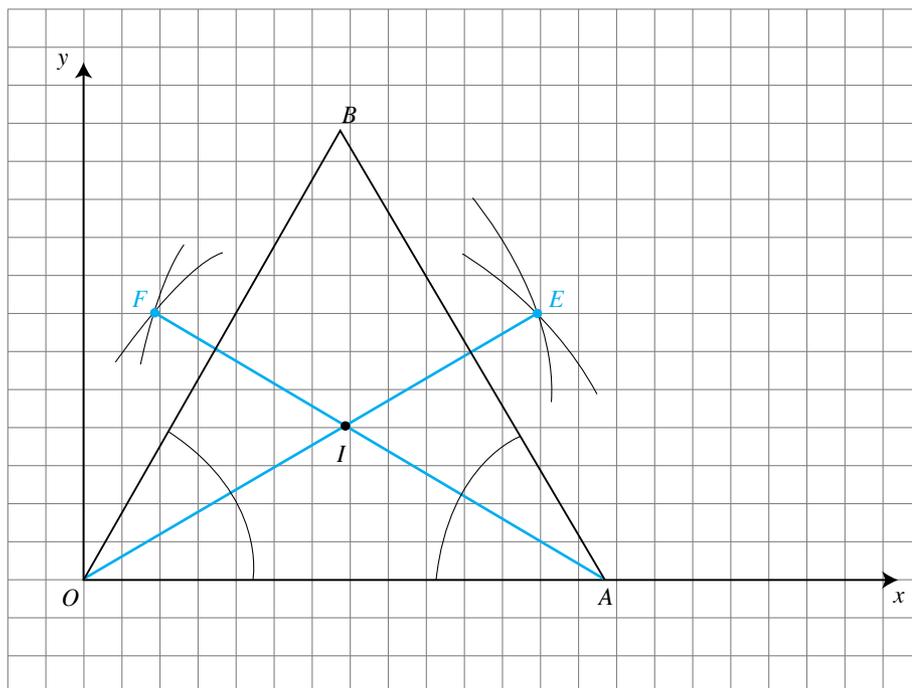


Fig. 13 ►

Si procede nel seguente modo:

- 1) equazione della retta  $OB$ :

$$y = mx + q$$

$$m = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$q = 0$  (la retta  $OB$  passa per l'origine),

$$y = \sqrt{3}x$$

- 2) Un generico punto  $P(x, y)$ , appartenente alla bisettrice  $OE$ , è equidistante dalla retta  $OB$  di equazione  $y = \sqrt{3}x$  e dalla retta  $OA$  di equazione  $y = 0$ . Ricordando la formula della distanza di un punto  $P(x, y)$  da una retta  $y = mx + q$

$$d = \frac{|y - mx - q|}{\sqrt{1 + m^2}},$$

le distanze del generico punto  $P$  dalla retta  $y = \sqrt{3}x$  e dalla retta  $y = 0$  risultano rispettivamente:

$$d_1 = \frac{|y - \sqrt{3}x|}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}|y - \sqrt{3}x|;$$

$$d_2 = |y|,$$

ed uguagliandole

$$\frac{1}{2}|y - \sqrt{3}x| = |y| \quad (1)$$

- 3) Togliendo i valori assoluti della (1) senza cambiare i segni, si ottiene un'equazione con coefficiente angolare negativo:

$$\frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x = y$$

$$\frac{1}{2}y - y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y = -\sqrt{3}x$$

Questa non può essere l'equazione della bisettrice  $OE$ . Osservando la figura 13 si vede, infatti, che la bisettrice  $OE$  forma un angolo acuto con l'asse delle ascisse, e, quindi, l'equazione di  $OE$  ha coefficiente angolare positivo.

Togliendo i valori assoluti della (1) e cambiando il segno del secondo membro si ha:

$$\frac{1}{2}(y - \sqrt{3}x) = -y$$

$$\frac{1}{2}y + y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

che è l'equazione della bisettrice  $OE$ .

- 4) L'equazione della retta  $AB$  è:

$$y + mx + q$$

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 4\sqrt{3}}{8 - 4} = -\sqrt{3},$$

$$q = -mx_A + y_A$$

$$q = -(-\sqrt{3}) \cdot 8 + 0 = 8\sqrt{3},$$

$$y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$$

- 5) Le distanze del generico punto  $Q(x, y)$ , appartenente alla bisettrice  $AF$ , dalle rette  $y = -\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$  e  $y = 0$  risultano rispettivamente:

$$d_1 = \frac{|y - (-\sqrt{3})x - 8\sqrt{3}|}{\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}|y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}|;$$

$$d_2 = |y|,$$

ed uguagliandole

$$\frac{1}{2}|y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}| = |y| \quad (2)$$

- 6) Togliendo i valori assoluti della (2) senza cambiare i segni, si ottiene un'equazione con coefficiente angolare positivo; infatti:

$$\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}) = y$$

$$\frac{1}{2}y - y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{1}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}$$

Questa non può essere l'equazione della bisettrice  $AF$ .

Osservando la figura 13 si vede, infatti, che la bisettrice  $AF$  forma un angolo ottuso con l'asse delle ascisse e, quindi, l'equazione di  $AF$  ha coefficiente angolare negativo.

Togliendo i valori assoluti della (2) e cambiando il segno del secondo membro si ha:

$$\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}x - 8\sqrt{3}) = -y$$

$$\frac{1}{2}y + y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{2}y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

che è l'equazione della bisettrice  $AF$ .

7) Risolvendo il sistema delle equazioni delle due bisettrici  $OE, AF$ , si ha:

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -x + 8$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

che sono le coordinate dell'incentro

$$I\left(4; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right),$$

come si può verificare direttamente nella figura 13. Si noti, infine, che il triangolo  $OAB$  è equilatero.

## 1.7

### Costruire il triangolo rettangolo con angoli di $30^\circ$ e $60^\circ$ e determinare le aree dei segmenti circolari

Sia nota la misura  $\overline{AB}$  dell'ipotenusa (Fig. 14) del triangolo rettangolo. Con centro nel punto medio  $M$  di  $\overline{AB}$  e raggio pari alla metà di  $\overline{AB}$ , si traccia la semicirconferenza di diametro  $\overline{AB}$ . Con centro in  $B$  e raggio pari ancora alla metà di  $\overline{AB}$ , si interseca la semicirconferenza nel punto  $C$ . Gli angoli del triangolo  $ABC$  risultano:

$$\hat{A}CB = 90^\circ, \quad \hat{B}AC = 30^\circ, \quad \hat{A}BC = 60^\circ$$

Indicando con  $r$  il raggio, i lati del triangolo risultano:

$$\text{ipotenusa} = \overline{AB} = 2r$$

$$\text{cateto minore} = \overline{BC} = r$$

$$\text{cateto maggiore} = \overline{AC} = \sqrt{3}r$$

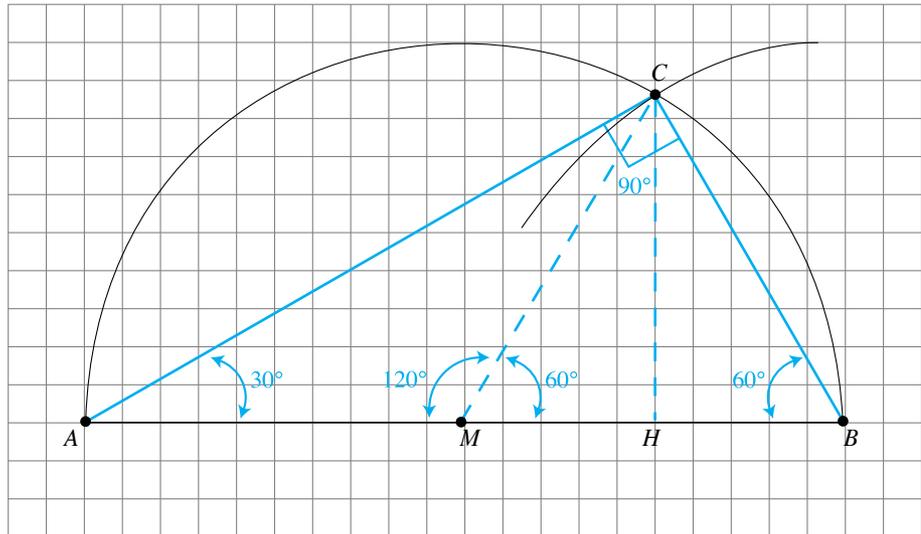


Fig. 14 ►

Il perimetro  $2p$  e l'area  $S$  del triangolo  $ABC$ , espressi in funzione del raggio  $r$  della circonferenza circoscritta, risultano:

$$2p = 2r + r + \sqrt{3}r$$

$$2p = 3r + \sqrt{3}r$$

$$2p = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)r ;$$

$$S = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{3}r \cdot r$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2$$

Unendo il vertice  $C$  con il punto medio  $M$  dell'ipotenusa  $\overline{AB}$ , il triangolo rettangolo  $ABC$  si scompone nei due triangoli  $MBC$  e  $AMC$ .

Il triangolo  $MBC$  è equilatero con lato uguale al raggio

$$r = \overline{MB} = \overline{BC} = \overline{MC},$$

mentre il triangolo  $AMC$  è isoscele con lati

$$\overline{AM} = \overline{MC} = r$$

$$\overline{AC} = \sqrt{3}r$$

L'altezza  $\overline{HC}$  si ottiene come rapporto tra il prodotto dei cateti e l'ipotenusa (infatti  $\overline{BC} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{HC} = 2S$ , dove  $S$  è la superficie del triangolo):

$$\overline{HC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{r \cdot \sqrt{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$$

Tenendo presente che  $\overline{HC}$ , oltre ad essere altezza, è anche mediana della base  $MB$  del triangolo equilatero  $MBC$ , si ha:

$$\overline{HM} = \overline{HB} = \frac{1}{2}r$$

L'area  $S_1$  del triangolo equilatero  $MBC$  risulta

$$S_1 = \frac{1}{2} \overline{MB} \cdot \overline{HC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

L'area  $S_2$  del settore circolare  $MCB$  è la sesta parte dell'area del cerchio:

$$S_2 = \frac{1}{6} \cdot \pi r^2$$

L'area  $S_3$  del segmento circolare individuato dalla corda  $\overline{BC}$  è uguale alla differenza tra l'area  $S_2$  del settore circolare  $MBC$  e l'area  $S_1$  del triangolo  $MBC$ :

$$S_3 = S_2 - S_1$$

$$S_3 = \frac{1}{6} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_3 = \frac{1}{2} r^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

L'area  $S_4$  del triangolo isoscele  $AMC$  si può ottenere come differenza tra l'area  $S$  del triangolo  $ABC$  e l'area  $S_1$  del triangolo  $MBC$ :

$$S_4 = S - S_1$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 ;$$

pertanto, i due triangoli  $AMC$  e  $MBC$  hanno la stessa area.

L'area  $S_5$  del settore circolare  $MAC$  è un terzo dell'area del cerchio:

$$S_5 = \frac{1}{3} \pi r^2$$

L'area  $S_6$  del segmento circolare individuato dalla corda  $\overline{AC}$  è uguale alla differenza tra l'area  $S_5$  del settore circolare  $MAC$  e l'area  $S_4$  del triangolo  $MAC$ :

$$S_6 = S_5 - S_4$$

$$S_6 = \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_6 = r^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

**1.8**

**Costruire il triangolo equilatero  
inscritto in una circonferenza ed esprimere  
l'area del triangolo e l'area del segmento circolare  
in funzione del raggio**

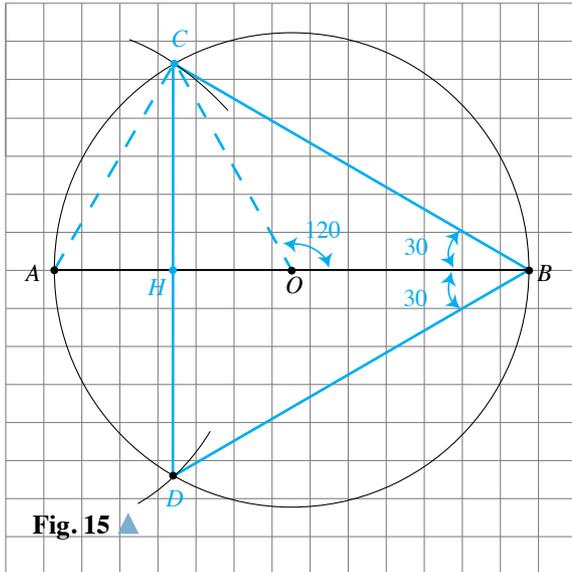


Fig. 15 ▲

Disegnata la circonferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$ , con centro in  $A$  e apertura di compasso ancora uguale al raggio  $r$ , si interseca la circonferenza nei punti  $C, D$  opposti rispetto al diametro  $\overline{AB}$ . Unendo  $C$  con  $B, D$  con  $B$  e  $C$  con  $D$  si ottiene il triangolo equilatero  $CDB$  (Fig. 15).

Il triangolo  $ABC$  è rettangolo con:

- ipotenusa =  $\overline{AB} = 2r$
- cateto minore =  $\overline{AC} = r$
- cateto maggiore =  $\overline{BC} = \sqrt{3}r$

Perciò: il lato del triangolo equilatero

$$l = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$$

è pari a  $\sqrt{3}$  per il raggio  $r$  della circonferenza circoscritta:

$$l = \sqrt{3}r$$

L'altezza  $h = \overline{HB}$  del triangolo equilatero è

$$h = \sqrt{(\sqrt{3}r)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2} \quad (\text{per il teorema di Pitagora})$$

$$h = \sqrt{3r^2 - \frac{3}{4}r^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{12r^2 - 3r^2}{4}}$$

$$h = \sqrt{\frac{9}{4}r^2}$$

$$h = \frac{3}{2}r ;$$

allo stesso risultato si perviene ricordando che

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l,$$

ed esprimendo  $l$  in funzione del raggio:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}r$$

$$h = \frac{3}{2}r$$

L'area  $S$  del triangolo equilatero, espressa in funzione del raggio, risulta essere:

$$S = \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{HB}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{3}r \cdot \frac{3}{2}r$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

Ogni lato del triangolo equilatero individua un **segmento circolare** la cui area è  $\frac{1}{3}$  della differenza tra l'area del cerchio e l'area del triangolo equilatero:

$$S_1 = \text{area segmento circolare} = \frac{1}{3} \left( \pi r^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 \right)$$

$$S_1 = \frac{1}{3} r^2 \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

L'area  $S_2$  del triangolo isoscele  $OBC$  è

$$S_2 = \frac{1}{2} \overline{BO} \cdot \overline{HC}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}r$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

L'area del settore circolare  $OBC$  (terza parte del cerchio) è

$$S_3 = \frac{1}{3} \pi r^2$$

L'area  $S_1$  del segmento circolare individuato dalla corda  $\overline{BC}$  è uguale alla differenza tra l'area  $S_3$  del settore circolare  $OBC$  e l'area  $S_2$  del triangolo isoscele  $OBC$ :

$$S_1 = S_3 - S_2$$

$$S_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

$$S_1 = \frac{1}{3} r^2 \cdot \left( \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

risultato già ottenuto per altra via.

**1.9**

**Divisione dell'angolo retto in tre parti uguali**

Per costruire l'angolo retto, con centro in  $O$  e raggio arbitrario si tracciano due archetti che intersecano l'asse  $x$  nei punti  $C, D$  opposti rispetto ad  $O$ . Con centro in  $C$  e raggio arbitrario, ma maggiore di  $\overline{OC}$ , si traccia un archetto e con centro in  $D$  e con lo stesso raggio si traccia un altro archetto che incontra il precedente nel punto  $E$  (Fig. 16).

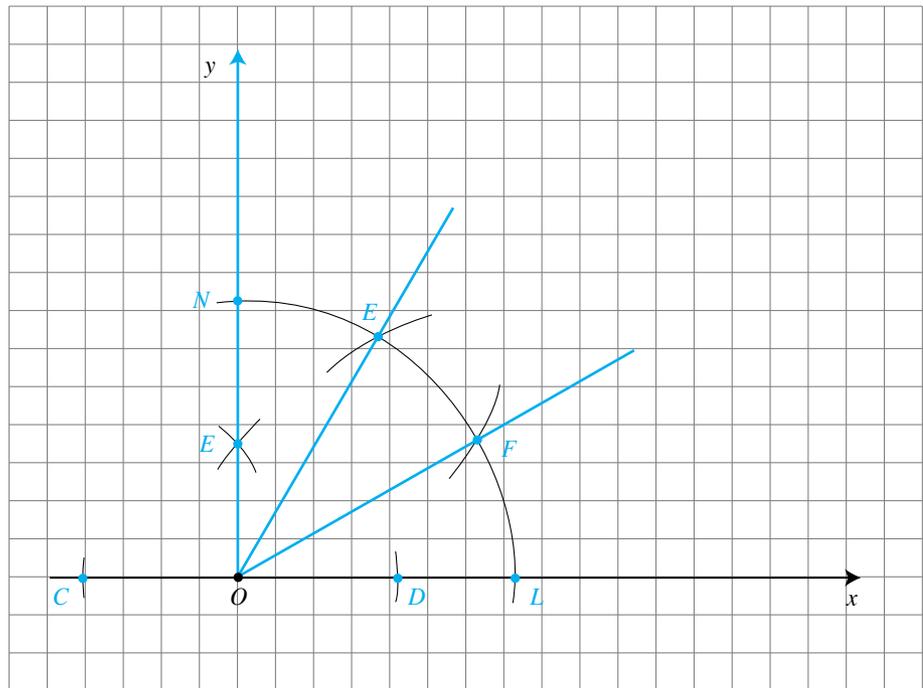


Fig. 16 ►

Ora procediamo per dividere l'angolo retto  $E\hat{O}D$  in tre parti uguali. Con centro in  $O$  e raggio arbitrario tracciamo il quarto di circonferenza che interseca gli assi  $x$  e  $y$  nei punti  $L, N$  rispettivamente. Con centro in  $L$  e con lo stesso raggio, intersechiamo il quarto di circonferenza in  $E$ . Con centro in  $N$  e con lo stesso raggio, intersechiamo il quarto di circonferenza in  $F$ . Le semirette  $OF, OE$  dividono l'angolo retto in 3 parti uguali:

$$L\hat{O}F = F\hat{O}E = E\hat{O}N = 30^\circ$$

La retta  $OF$  forma un angolo di  $30^\circ$  con l'asse  $x$ , e, perciò, il suo coefficiente angolare è

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e la sua equazione

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

La retta  $OE$  forma un angolo di  $60^\circ$  con l'asse  $x$ , e, perciò, il suo coefficiente angolare è

$$m = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

e la sua equazione

$$y = \sqrt{3}x$$

**ESEMPIO**

**Determinare le coordinate dei punti di intersezione  $F, E$  (primo quadrante) tra la circonferenza con centro nell'origine e raggio  $r$  e le rette di equazione**

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y = \sqrt{3}x \text{ rispettivamente.}$$

L'equazione della circonferenza con centro nell'origine e raggio  $r$  è

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$$

si ottengono le coordinate del punto  $F$ :

$$x^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{1}{3}x^2 = r^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 = r^2$$

$$x^2 = \frac{3}{4}r^2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

e considerando solamente la soluzione positiva

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

si ha:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

$$y = \frac{1}{2} r$$

In definitiva

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} r ; \frac{1}{2} r\right)$$

Risolviendo il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ y = \sqrt{3} x \end{cases}$$

si ottengono le coordinate del punto  $E$ :

$$x^2 + (\sqrt{3} x)^2 = r^2$$

$$x^2 + 3x^2 = r^2$$

$$4x^2 = r^2$$

$$x = \pm \frac{1}{2} r$$

e considerando solamente la soluzione positiva si ha:

$$y = \sqrt{3} x = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

In definitiva

$$E\left(\frac{1}{2} r ; \frac{\sqrt{3}}{2} r\right)$$

Con  $r = 1$ , l'ascissa e l'ordinata del punto  $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right)$  sono rispettivamente il *coseno* e il *seno* dell'angolo  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ .

Con  $r = 1$ , l'ascissa e l'ordinata del punto  $E\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  sono rispettivamente il *coseno* e il *seno* dell'angolo  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .